



**DELHI UNIVERSITY**  
**LIBRARY**

DELHI UNIVERSITY LIBRARY

Cl. No. B23

168 N.E. 7.1

Ac. No. 1105

14 SEP 1970 Date of receipt or loan

This book should be returned on or before the date last stamped below. An overdue charge of 5 Paise will be collected for each day the book is kept overtime.

---





سلسلہٴ ترجمہٴ کتب خانہٴ اسلامیہ

# مساواتوں کا نظریہ

جلال دُلّ

تصنیف

ڈبلیو۔ ایس۔ برنساؤڈ ایم۔ اے، ڈی۔ ایس۔ سی

اے۔ ڈبلیو پیپٹن ایم۔ اے، ڈی۔ ایس۔ سی

ترجمہ

محمد نذیر الدین ایم۔ اے (عثمانیہ)

رکن ادارہ ترجمہ عثمانیہ کراچی

۱۳۵۳ھ ۱۳۴۲ھ ۱۳۴۱ھ ۱۳۴۰ھ

دارالطبع اسلامیہ کراچی





# فہرست مضامین

## مساواتوں کا نظریہ

جلداول

تمہید

صفحہ

دفعہ

۱

۲

۳

۱ - تعریفات -

۲ - عددی اور جبری مساواتیں -

۳ - کثیرالارقام -

## پہلا باب

کثیرالارقام کے عام خواص

۴ - کثیرالارقام سے متعلق مسئلہ جبکہ متغیر کو بڑی قیمتیں دی جائیں -

۵ - متشابہ مسئلہ جبکہ متغیر کو چھوٹی قیمتیں دی جائیں -

۹

صفحہ

- ۶ - متغیر کو بڑھانے سے یا گھٹانے سے کثیر الارقام کی شکل  
میں تبدیلی، مشتق، تفاضل - ۱۰
- ۷ - منطق، صحیح تفاعل کا تسلسل - ۱۳
- ۸ - خارج قسمت اور باقی کی شکل جبکہ کسی کثیر الارقام کو ایک  
ثنائی جملہ سے تقسیم کیا جائے - ۱۴
- ۹ - تفاضلوں کی جدول - ۱۶
- ۱۰ - کثیر الارقام کی تریسیمی تبصیر - ۱۸
- ۱۱ - کثیر الارقام کی اعظم اور اقل قیمتیں - ۲۳

## دوسرا باب

### مساواتوں کے عام خواص

- ۱۳، ۱۴، ۱۵ - مساواتوں کی حقیقی اصولوں سے متعلق مسئلے - ۲۴
- ۱۵ - عام مساوات میں ایک اصل کی موجودگی، خیالی اصلیں - ۲۷
- ۱۶ - مساوات کی اصولوں کی تعداد سے متعلق مسئلہ - ۲۸
- ۱۷ - مساوی اصلیں - ۳۲
- ۱۸ - مساواتوں میں خیالی اصلیں زوج زوج داخل ہوتی ہیں - ۳۳
- ۱۹ - مثبت اصولوں کے لئے ڈیکارٹ کا قانون علامت - ۳۶
- ۲۰ - منفی اصولوں کے لئے ڈیکارٹ کا قانون علامت - ۳۸
- ۲۱ - خیالی اصولوں کے وجود کو ثابت کرنے میں ڈیکارٹ  
کے قانون کا استعمال - ۳۸
- ۲۲ - وہ مسئلہ جو تغیر کی بجائے دو دئے ہوئے اعداد درج  
کرنے سے منطوق ہے - ۳۹

صفحہ

۴۱

دفعہ

شالیں

## تیسرا باب

ن  
مساواتوں کے سروں اور اصلوں کے درمیان  
روابط اور اصلوں کے متشاكل تفاعلوں کا استعمال

- ۲۳ - اصلوں اور سروں کے درمیان روابط -  
۲۴ - مسئلہ کے اطلاقات -  
۲۵ - مساوات کے درجہ کا تنزل جبکہ اسکی دو اصلوں  
کوئی ربط موجود ہو -  
۲۶ - اکائی کے جذر اللعب -  
۲۷ - اصلوں کے متشاكل تفاعل -  
۲۸ - متشاكل تفاعلوں سے متعلق مسائل -  
شالیں -

## چوتھا باب

مساواتوں کا استحالة

- ۲۹ - مساواتوں کا استحالة -  
۳۰ - اصلیں پہ تبدیل علامت -  
۳۱ - دی ہوئی مقدار سے اصلوں کو ضرب دینا -

صفحہ	درجہ
۸۸	۳۲ - متکافی اہلیں اور متکافی مساواتیں -
۹۰	۳۳ - اصولوں کو قدر ایک دی ہوئی متحدہ کے گھٹانا یا بڑھانا -
۹۴	۳۴ - رتوں کا استخراج -
۹۶	۳۵ - شنائی سر -
۱۰۱	۳۶ - کعبی -
۱۰۳	۳۷ - چار درجہ -
۱۰۶	۳۸ - ہم رسم استعمال -
۱۰۸	۳۹ - متشاکل تفاعلوں کے ذریعہ استعمال -
	۴۰ - وہ مساوات بنانا جسکی اہلیں دی ہوئی مساوات کی
۱۱۰	اصولوں کی کوئی قوتیں ہوں -
۱۱۴	۴۱ - استعمال کی عام صورت -
۱۱۶	۴۲ - کعبی کی مربع دائرہ قوتوں کی مساوات -
۱۱۹	۴۳ - کعبی کی اصولوں کی جانچ -
۱۲۱	۴۴ - عام صورت میں فرقوں کی مساوات -
۱۲۲	شالیں -

## پانچواں باب

### متکافی اور شنائی مساواتوں کا حل

۱۳۰	۴۵ - متکافی مساواتیں -
	۴۶ - شنائی مساواتیں - مسائل جنہیں شنائی مساواتوں کے
۱۳۴	خاص خواص درج ہیں -
۱۳۸	۴۷ - لا - ۱ = کی خاص اہلیں -
۱۴۳	۴۸ - شنائی مساواتوں کو دائری تفاعلوں کے ذریعہ حل کرنا -

صفحہ

۱۴۵

دفعہ

مثالیں

# چھٹا باب

## کعبی اور چار درجہ کا جبری حل

- ۵۵ - مساواتوں کا جبری حل - ۱۵۵
- ۵۶ - کعبی مساوات کا جبری حل - ۱۵۹
- ۵۷ - عددی مساواتوں پر استعمال - ۱۶۱
- ۵۸ - کعبی کو دو مکعبوں کے فرق کی شکل میں بیان کرنا - ۱۶۲
- ۵۹ - اصولوں کے متشاکل تفاعلوں کے ذریعہ کعبی کا حل - ۱۶۳
- مثالیں
- ۶۰ - کعبی کی دو اصولوں کے درمیان ہم رسم ربط - ۱۶۶
- ۶۱ - چار درجہ کا پہلا حل جذروں کے ذریعہ - ۱۶۷
- مثالیں - ۱۸۳
- ۶۲ - جذروں کے ذریعہ چار درجہ کا دوسرا حل - ۱۸۷
- ۶۳ - چار درجہ کو دو اجزائے ضربی میں تحلیل کرنا - ۱۹۰
- ۶۴ - چار درجہ کو دو اجزائے ضربی میں تحلیل کرنا۔ دو طریقہ - ۱۹۶
- ۶۵ - چار درجہ کا استعمال متکافی شکل میں - ۱۹۹
- ۶۶ - اصولوں کے متشاکل تفاعلوں سے چار درجہ کا حل - ۲۰۴
- ۶۷ - چار درجہ کی مربع دار فرقوں کی مساوات - ۲۰۹
- ۶۸ - چار درجہ کی اصولوں کی نوعیت کی جانچ - ۲۱۲
- مثالیں - ۲۱۴

صفحہ

صفحہ

# مسائل اولیٰ باب

## مشق تفاعلوں کے خواص

- ۶۹ - مشق تفاعلوں کی تربیتی تعبیر۔ ۲۲۹
- ۷۰ - شیر، ردام کی عمر اور قوت خیموں سے متعلق مسئلہ۔ ۲۳۰
- ۷۱ - بول کا مسئلہ - نتیجہ صریح۔ ۲۳۲
- ۷۲ - مشق تفاعلوں کی تربیت۔ ۲۳۴
- ۷۳ - ضعیفی صوبوں سے متعلق مسئلہ۔ ۲۳۵
- ۷۴ - دو مسئلے جو مساوات پر ایک دوسرے سے متعلق ہیں۔ ۲۳۹
- ۷۵ - مسائل سے متعلق ہیں۔ ۲۴۱

# مسائل اولیٰ باب

## اصولوں کے متعلق تفاعل

- ۷۷ - یونین کا مسئلہ صوبوں، قوتوں، مجموعوں پر۔ ۲۴۵
- ۷۸ - کسی چیز کی مساوات پر مشق کے متعلق تفاعل۔ ۲۴۷
- ۷۹ - صوبوں، قوتوں، مجموعوں کے متعلق تفاعل۔ ۲۴۹
- ۸۰ - یونین کا مسئلہ صوبوں، قوتوں، مجموعوں پر۔ ۲۵۱
- ۸۱ - یونین کا مسئلہ صوبوں، قوتوں، مجموعوں پر۔ ۲۵۳
- ۸۲ - یونین کا مسئلہ صوبوں، قوتوں، مجموعوں پر۔ ۲۵۵

صفحہ	دفعہ
۲۵۹	۸۲ - اصولوں کے متشاکل تقاعدوں کو محسوب کرنا۔
۲۶۵	۸۳ - متجانس حاصل ضرب۔

## نوال باب

### مساداتوں کی اصولوں کی انتہائیں

۲۶۹	۸۴ - انتہاؤں کی تعریف۔
۲۷۰	۸۵ - اصولوں کی انتہائیں۔ مسئلہ ۱۔
۲۷۱	۸۶ - اصولوں کی انتہائیں۔ مسئلہ ۲۔
۲۷۳	۸۷ - عملی اطلاقات۔
۲۷۶	۸۸ - انتہائیں معلوم کرنے کا نیوٹن کا طریقہ۔ مسئلہ ۳۔
۲۷۹	۸۹ - سفلی انتہائیں اور منفی اصولوں کی انتہائیں۔
۲۷۹	۹۰ - انتہائی مساداتیں۔
۲۸۱	مثالیں۔

## دسوال باب

### مساداتوں کی اصولوں کو جد کرنا

۲۸۳	۹۱ - عام تشریح۔
۲۸۴	۹۲ - فوریر اور بوڈان کا مسئلہ۔
۲۸۷	۹۳ - اس مسئلہ کا استعمال۔
۲۹۲	۹۴ - اس مسئلہ کا استعمال خیالی اصولوں پر۔
۲۹۶	۹۵ - فوریر اور بوڈان کے مسئلہ سے نتائج صریح۔



صفحہ	رقعہ
۲۹۷	۹۶ - اسٹرم کا مسئلہ -
۳۰۷	۹۷ - اسٹرم کا مسئلہ - مساوی اصلیں -
۳۱۱	۹۸ - اسٹرم کے مسئلہ کا استعمال -
۳۱۷	۹۹ - مساوات کی اصولوں کے حقیقی ہونی کی شرطیں -
۳۱۹	۱۰۰ - چار درجہ کی اصولوں کے حقیقی ہونی کی شرطیں -
۳۲۰	مثالیں -

## گیارہواں باب

### عددی مساواتوں کا حل

۳۲۶	۱۰۱ - جبری اور عددی مساواتیں -
۳۲۷	۱۰۲ - متوافق اصولوں سے متعلق مسئلہ -
۳۲۸	۱۰۳ - نیوٹن کا مقسوم علیہم کا طریقہ -
۳۳۰	۱۰۴ - مقسوم علیہم کے طریقہ کا استعمال -
۳۳۴	۱۰۵ - آزمائشی مقسوم علیہم کی تعداد کو محدود کرنا کا طریقہ -
۳۳۶	۱۰۶ - ضعیفی اصولوں کی تعیین -
۳۴۱	۱۰۷ - نیوٹن کا تقرب کا طریقہ -
۳۴۳	۱۰۸ - عددی مساواتوں کو حل کرنے کے لئے ہارنر کا طریقہ -
۳۴۸	۱۰۹ - آزمائشی مقسوم علیہم کا اصول -
۳۵۴	۱۱۰ - ہارنر کے عمل کا اختصار -
۳۵۹	۱۱۱ - ہارنر کے طریقہ کا استعمال مساوی اصولوں کی صورت میں -
۳۶۴	۱۱۲ - تقرب کا لگاریتم کا طریقہ -
۳۶۶	۱۱۳ - ڈیکارٹ کے طریقہ سے چار درجہ کا عددی حل -
۳۶۹	متفرق مثالیں -

صفحہ

دفعہ

# بارہواں باب

## ملف اعداد اور ملف متغیر

- ۱۱۴ - ملف اعداد - تریبی تعبیر - ۳۷۷
- ۱۱۵ - ملف اعداد - جمع اور تفریق - ۳۷۹
- ۱۱۶ - ضرب اور تقسیم - ۳۸۱
- ۱۱۷ - ملف عددوں پر دیگر اعمال - ۳۸۲
- ۱۱۸ - ملف متغیر - ۳۸۲
- ۱۱۹ - ملف متغیر کے تفاعل کا تسلسل - ۳۸۵
- ۱۲۰ - تفاعل کی سرعت کا تغیر جب ملف متغیر چھوٹا بندھنی - ۳۸۶
- ۱۲۱ - روشنی کا مسئلہ - ۳۸۹
- ۱۲۲ - عام مساوات کی اصلوں کی تعداد سے متعلق بنیادی مسئلہ کا ثبوت - ۳۹۱
- ۱۲۳ - بنیادی مسئلہ کا دوسرا ثبوت - ۳۹۲
- ۱۲۴ - ملف عددی اصلوں کی تعیین - کبھی کا حل - ۳۹۴
- ۱۲۵ - چار درجہ کا حل - ۳۹۹
- ۱۲۶ - چار درجہ کا حل (گذشتہ سے پیوستہ) - ۴۰۳

صفحہ

نوٹ (ب)۔ عددی مساواتوں کا حل ۴۱۵

نوٹ (ج)۔ یہ مسئلہ کہ ہر مساوات کی ایک اہل ہوتی ہے۔ ۴۲۱

اشاریہ۔ ۴۲۵



(1)

## مساواتوں کا نظریہ

### تمہید

۱۔ تعریفات :- کسی ریاضی جملہ کو جس میں ایک مقدار شامل ہو اس مقدار کا تفاعل کہتے ہیں۔

ہیں خاص کر ایسے جبری جملوں سے سابقہ پڑے گا جو منطق اور مکملہ ہونگے کسی مقدار کے منطق تفاعل سے وہ تفاعل مراد ہے جس میں یہ مقدار صرف منطق شکل میں موجود ہو یعنی ایسی شکل میں جو کسری قوت نما اور علامت جذر سے آزاد ہو۔ کسی مقدار کے مکملہ تفاعل سے وہ تفاعل مراد ہے جس میں یہ مقدار صرف مکملہ شکل میں موجود ہو یعنی کسر کے نسب نما میں ہرگز نہ آئے۔ مثلاً جلا ذیل جس میں ن مثبت صحیح عدد ہے لا کا ایک منطق اور مکملہ جبری تفاعل ہے :-

$$لا^۰ + ب لا^۱ + ج لا^۲ + ... + ک لا + ل$$

یہ یاد رہے کہ یہ تعریف صرف مقدار لا کے لحاظ سے ہے جس کا جملہ لا تفاعل قرار دیا گیا ہے۔ مختلف سر 'ا' ب 'ج' وغیرہ غیر منطق یا کسری ہو سکتے ہیں اور پھر بھی لا کا یہ تفاعل منطق اور مکملہ ہوگا۔  
اختصار کی خاطر لا کا تفاعل فا ( لا ) ف ( لا ) فہ ( لا ) یا ایسی ہی

کسی علامت سے تعبیر کیا جاتا ہے۔  
ایسے جبری تفاعل کو کثیر الارقام اس وجہ سے کہا جاتا ہے کہ وہ لاکھ کی مختلف قوتوں والی رقوموں سے جو مثبت یا منفی علامتوں سے ملا دی گئی ہوں بنتا ہے۔ (2)

اگر لاکھ کو متغیر قرار دیا جائے تو اس کی بعض قیمتوں کے لئے ایک کثیر الارقام دوسرے کثیر الارقام کے مساوی ہو سکتا ہے جو بالکل جداگانہ طور پر بنا ہو۔ اس قسم کے ربط کو اگر جبری طور پر ظاہر کیا جائے تو اس کو مساوات کہتے ہیں اور لاکھ کی کوئی قیمت جو اس مساوات کو پورا کرے اس مساوات کی اصل کہلاتی ہے۔ تمام ممکن اصولوں کو معلوم کرنے کا نام مساوات کا مکمل حل ہے۔ یہ ظاہر ہے کہ تمام رقوموں کو ایک طرف لانے سے ہم کسی مساوات کو لاکھ کی قوتوں میں حسب ذیل طریقہ پر ترتیب دے سکتے ہیں:-

$$L^0 + L^1 + L^2 + \dots + L^{n-1} + L^n = 0$$

اس مساوات میں چونکہ بڑی سے بڑی قوت  $n$  ہے اس لئے اس کو لائن  $n$  میں درجہ کی مساوات کہتے ہیں۔ ایسی مساوات کے لئے ہم عام طور پر شکل مندرجہ بالا استعمال کریں گے۔ اس کے لائحہ سے معلوم ہو سکتا ہے کہ کونسا عددی سر لاکھ کی کس قوت کے ساتھ ہے کیونکہ ہر رقم میں لاکھ کی قوت اور اس کے لائحہ کا مجموعہ  $n$  رہتا ہے۔ کوئی مساوات نہیں بدلتی اگر ہم اس کی سب رقوموں کو کسی مقدار سے تقسیم کریں۔ اس لئے اگر ہم چاہیں تو اسے تقسیم کر کے مساوات بالائیں لاکھ کا سر ایک بنا سکتے ہیں۔ اس تقسیم کا عمل اکثر سہولت بخش ہوگا اور ایسی صورتوں میں مساوات بالاشکل

$$L^0 + L^1 + L^2 + \dots + L^{n-1} + L^n = 0$$

میں لکھی جائے گی۔ مساوات کو مکمل ہم اس وقت کہیں گے جب اس میں  $n$  سے صفر تک

قوت رکھنے والی لاکھ سب رقمیں موجود ہوں اور غیر مکمل اس وقت جب بعض رقمیں موجود نہ ہوں یعنی جب بم، بم، بم، ..... وغیرہ سروں میں سے بعض صفر کے مساوی ہوں۔ رقم بم کو جس میں لاکھ شامل نہیں ہے مطلق رقم کہتے ہیں۔ مساوات کو عددی یا جبری کہا جائے گا جو جب اس کے کہ اس کے مساوی اعداد یا جبری حروف ہوں۔

## ۲۔ عددی اور جبری مساواتیں۔ ریاضیات و طبیعیات کی اکثر تحقیقوں

میں بالآخر ہم ایک ایسے ریاضی مسئلہ پر پہنچتے ہیں جو ایک مساوات کی شکل میں رونما ہوتا ہے اور اس مساوات کے حل پر اس مسئلہ کا حل منحصر ہوتا ہے۔ اس لئے یہ فطری بات ہے کہ تاریخ سائنس کی ابتدائی منزل میں ہی علماء ریاضی کی توجہ اس نوعیت کے سوالات کی طرف منعطف ہوئی چنانچہ نظریہ معادلات کا علم جو اس وقت (8) موجود ہے علماء ریاضی کی مسلسل کوششوں کا نتیجہ ہے جو انہوں نے کسی درجہ کی مساواتوں کے حل کرنے کے لئے عام طریقوں کے دریافت کرنے میں صرف کیں۔ جب کسی مساوات کے سر دئے ہوئے اعداد ہوں تو ایسی عددی قیمت یا جہاں ممکن ہو ایسی مختلف عددی قیمتوں کے دریافت کر نیکاً مسئلہ پیش ہوتا ہے جو اس مساوات کو پورا کریں۔ نظریہ معادلات کے اس شعبہ میں بہت بڑی ترقی ہو چکی ہے اور اصولوں کی عددی قیمتوں کو معلوم کرنے کے بہترین طریقے جو اب تک معلوم ہوئے خواہ یہ قیمتیں تقریبی ہوں یا بالکل ٹھیک اس کتاب میں اپنے اپنے مناسب مقام پر درج کئے جائیں گے۔

اتنی ہی ترقی ان مساواتوں کا عام حل دریافت کرنے میں نہیں ہوئی جن کے سر جبری حروف ہوں مثلاً علم یہ جانتا ہو گا کہ مساوات درجہ دوم کی اصل کو ایک عام ضابطہ کی شکل میں سروں کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے جبکہ مساوات کے سر حروف سے تعبیر ہوں اور یہ کہ کسی خاص عددی مساوات کی عددی اصلیں اس ضابطہ میں حروف کی بجائے متناظر اعداد مندرج کرنے سے حاصل ہو سکتی ہیں۔ اس لئے فطریہ سوال پیدا ہوا کہ آیا اسی قسم کا ضابطہ اعلیٰ درجوں کی مساواتوں کے

حل کے لئے دریافت کرنا ممکن ہے چنانچہ اس قسم کے ضابطے تیسرے اور چوتھے درجہ کی مساداتوں کے لئے حاصل کر لئے گئے ہیں لیکن اس کے ساتھ یہ بات بتا دینا ضروری ہے کہ بعض صورتوں میں ان ضابطوں میں حرکت کی بجائے عددوں کے اندراج سے صحیح حل نہیں ملتا اور اس لئے اس لحاظ سے یہ ضابطے مسادات درجہ دوم کے جبری طور سے کمتر درجہ رکھتے ہیں۔

پانچویں اور اس سے اعلیٰ درجوں کی مساداتوں کے حل کے لئے اس قسم کے عام ضابطہ کو دریافت کرنے میں اندر کو ششیں کی گئیں لیکن تحقیقات جدید سے یہ بات پایہ ثبوت کو پہنچ چکی ہے کہ پانچویں یا اس سے اعلیٰ درجہ کی مسادات کی اصل کو جذباتی علامتوں اور جبروتی علامتوں کے دوسرے عام اعمال کی مدد سے سروں کی رقوم میں بیان کرنا ناممکن ہے۔

۴۔ کثیر الارقام۔ مشابہات ماسبق سے ظاہر ہے کہ نظریہ معادلات کے علم (۵)

کا ایک اہم مقصد متغیر مقدار (یا) کی وہ قیمتیں - ساؤم کرنا ہے جن کے اندراج سے کثیر الارقام (۱) کی قیمت صفر ہو جائے۔ لہذا ایسی قیمتوں کو معایم کرنے کی کوشش میں متعدد سوالات پیش ہو گئے جو (۱) کی قیمتوں کے لئے کثیر الارقام (۱) کی اختیار کردہ قیمتوں سے متعلق ہو گئے۔ پہلے آئندہ باب میں فی الواقعہ مسئلہ دیکھیں گے کہ لا انتہائی منفی مقدار  $(-\infty)$  سے لا انتہائی بڑی مثبت مقدار  $(+\infty)$  تک متغیر جوئے والی (۱) کی قیمتوں کے مسلسل سلسلہ کے جواب میں (۱) بھی ایسی قیمتیں اختیار کرتا ہے جو مسلسل بدلتی ہیں۔ اس قسم کے تغیرات کا علم کثیر الارقام کے نظریہ کا ایک بہت ہی اہم حصہ ہے۔ عددی مساداتوں کا عام حل فی الحقیقت محض طلب محل ہے اور متغیر (۱) کی بعض اختیاری قیمتوں کے جواب میں کثیر الارقام کی اختیار کردہ قیمتوں پر غور کرنے سے گو ہم خود اصل کو نہ معلوم کرسکیں کہ ان کو بہ معلوم کرسکتے ہیں کہ مسادات کی اصل (۱) حدود کے اندر واقع ہے اور پھر اپنے عمل کو وسیع تر کر کے زیادہ قریب تر حدود دریافت کرسکتے ہیں۔

کثیر الارقام کو بعض اوقات کثیر درجی (Quantie) کہا جاتا ہے۔  
 مختلف درجوں کے کثیر درجی جملوں کو مختلف نام دینا سہولت بخش ہے چنانچہ  
 دو درجی (کبھی) چار درجی، پنج درجی شش درجی وغیرہ ان  
 کثیر درجی جملوں کو تعبیر کرنے میں استعمال ہونگے جو علی الترتیب دوسرے تیسرے  
 چوتھے، پانچویں، چھٹے وغیرہ درجوں کے ہوں۔ ان کثیر درجی جملوں کو  
 صفر کے مساوی رکھنے سے جو مساواتیں حاصل ہوتی ہیں ان کو علی الترتیب  
 مساوات درجہ دوم، مساوات درجہ سوم یا کبھی مساوات، مساوات درجہ پنجم وغیرہ  
 کہتے ہیں۔





(5)

## پہلا باب کثیر الارقام کے عام خواص

۴۔ متغیر (لا) کی مختلف قیمتوں کے متناظر کثیر الارقام کی قیمت میں تبدیلیوں کا مشاہدہ کرتے وقت ہمیں پہلے یہ دریافت کرنا ہوگا کہ جب متغیر لا کو بہت بڑی یا بہت چھوٹی قیمت دیکھائے تو کثیر الارقام میں اہم ترین حصہ لینے والی ارقام کونسی ہوں۔ اس باب کے مختلف دفعات میں اسی پر روشنی ڈالی جائیگی۔

کثیر الارقام  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$  کو شکل

$$1 + \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right]$$

میں رکھنے سے زیادہ بہتر ہے کہ جب لا کی طرف اشارہ ہوتا ہے تو کثیر الارقام کی قیمت رقم  $1 + \frac{1}{2}$  کی طرف اشارہ ہوتی ہے۔ یہ رقم  $1 + \frac{1}{2}$  سے ایک ایسی مقدار معلوم ہو سکے گی کہ اس کو یا اس سے بڑی مقدار کو لائی بجائے کثیر الارقام میں مندرجہ کریں تو رقم  $1 + \frac{1}{2}$  کی قیمت باقی تمام ارقام کی مجموعی قیمت سے بڑی ہوگی۔ آئندہ ہم  $1 + \frac{1}{2}$  کو مثبت فرض کریں گے اور بالعموم مساداتوں اور کثیر الارقام کی قیمتیں قوت والی رقم مثبت علامت کی فرض کی جائیگی۔

مذکورہ :- اگر کثیر الارقام

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$$

میں لا کی بجائے  $1 + \frac{1}{2}$  یا اس سے بڑا عدد مندرجہ کیا جائے جہاں ک 'سرو'  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$  میں سے بلحاظ علامت سب سے بڑا سر ہے تو رقم  $1 + \frac{1}{2}$  باقی

سب رقمیں کے مجموعہ سے بڑی ہوگی۔

تساویات

$$1 < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \dots$$

(۵) پوری ہوگی لاکھ کسی ایسی قیمت کے لئے جو مساوات

$$1 < \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \dots \right)$$

کو پورا کرے۔ چنانچہ  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \dots$  میں سے بالآخر علامت مثبت بڑا ہوگا۔ غلط وصالی کے اندر کے سلسلہ ہندسیہ کو جمع کرنے سے

$$1 < \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$یا \quad 1 < \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$$

یہ تساویات پوری ہوگی اگر

$$1 < (1 - \frac{1}{2})$$

$$یعنی \quad 1 < 1 - \frac{1}{2}$$

یہاں جو مسئلہ ثابت کیا گیا ہے اس کی مدد سے اس صورت میں جبکہ لاکھ عام کے سر دئے ہوئے  
 اعداد ہوں ہم ایک ایسا عدد معلوم کر سکتے ہیں کہ جب لاکھ  $\infty$  سے قریب تر قیمتیں  
 دی جائیں تو کثیر لاکھ عام کی علامت ہمیشہ مثبت رہے گی۔ اگر ہم لاکھ علامت بدل دیں تو کثیر لاکھ عام  
 کی پہلی رقم کی علامت باقی رہے گی یا منفی ہو جائے گی۔ بموجب اس کے کہ ان قیمت عدد  
 یا حقائق۔ اس سے ظاہر ہے کہ سلسلہ لاکھ عام سے ہم لاکھ ایک ایسی منفی قیمت بھی دریافت  
 کر سکتے ہیں کہ  $\infty$  سے قریب تر قیمتوں کے لئے کثیر لاکھ عام کی علامت ہمیشہ مثبت ہوگی  
 یا منفی ہوگی۔ بموجب اس کے کہ ان قیمت عدد یا حقائق۔ ہم لاکھ عام کی ترکیب سے کہیں  
 معلوم کی ہوئی حدود سے زیادہ صحیح حدود جو صفر سے قریب ہوں دریافت کر سکتے ہیں جن کے باہر تعادل

کی علامت ہمیشہ وہی رہیگی۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ مندرجہ بالا ثبوت میں ہم نے ناموافق ترین صورت لی ہے جس میں پہلے سر کے سوائے باقی تمام سر منفی ہو گئے ہوں گے۔ سادی ہیں حالانکہ عام طور پر سر مثبت، منفی یا صفر ہو سکتے ہیں۔ کسی آئینہ باب میں ہم وہ مسئلہ کو بیان کریں گے جن سے یہ زیادہ صحیح حدود دریافت کی جاسکتی ہیں۔

۵۔ اب ہم یہ دریافت کریں گے کہ اگر لاکہ قیمت غیر محدود طور پر گھٹائی جائے تو کثیر الارقام کی کوئی رقم سب سے زیادہ اہمیت رکھتی ہے۔ نیز ہم ایک ایسی مقدار دریافت کریں گے کہ لاکہ بجائے اسکو یا اس سے چھوٹی کسی قیمت کو درج کرنے سے مذکورہ بالا رقم باقی سب رقموں پر غالب ہو جائے۔

مسئلہ :- اگر کثیر الارقام

$$(7) \quad 1 \cdot 10^n + 1 \cdot 10^{n-1} + 1 \cdot 10^{n-2} + \dots + 1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$$

میں لاکہ بجائے  $\frac{1}{10^n}$  یا اس سے چھوٹی قیمت مندرج کی جائے جہاں  $10^n$  کو چھوڑ کر سب سے بڑا سر  $10^{n-1}$  ہے تو رقم  $10^n$  بلحاظ قیمت مطلق باقی تمام رقموں کے مجموعہ سے بڑی ہوگی۔

اس کو ثابت کرنے کے لئے فرض کرو کہ  $\frac{1}{10^n} = \frac{1}{10^m}$  تو دفعہ ۴ کے مسئلہ سے

چونکہ سروں  $10^m, 10^{m-1}, 10^{m-2}, \dots, 10^1, 10^0$  میں سے بلحاظ علامت سب سے بڑا سر  $10^m$  ہے

ماکی قیمت  $\frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^{n-1}} + \dots + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^0}$  سے بڑی قیمت کے لئے

$$10^m < 10^n + 10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10^1 + 10^0$$

$$\text{یعنی } 10^m < 10^n + 10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10^1 + 10^0$$

پس  $\frac{1}{10^n}$  یا اس سے چھوٹی قیمت کے لئے

$$1-1 + 1-2 + 1-3 + \dots + 1-n$$

یہ مسئلہ دوسرے الفاظ میں اکثر اس طرح بیان کیا جاتا ہے :-  
 لائی اتنی چھوٹی قیمتیں مقرر کی جاسکتی ہیں کہ ان کے اندرج سے کثیر الارقام

$$1-1 + 1-2 + 1-3 + \dots + 1-n + 1-n$$

اکسی مقررہ مقدار سے کم ہو۔

اس بیان کی تصدیقی ثبوت بالا سے ظاہر ہے کیونکہ  $1-n$  کو مقررہ مقدار خیال  
 کیا جاسکتا ہے۔ ایک اور مفید شکل میں مسئلہ بالا اس طرح پیش کیا جاسکتا ہے :-  
 جب متغیر لا کو بہت چھوٹی قیمت دی جائے تو کثیر الارقام

$$1-1 + 1-2 + 1-3 + \dots + 1-n + 1-n$$

کی علامت وہی ہوگی جو رقم اول  $1-n$  لائی ہے۔  
 یہ بات کثیر الارقام کو شکل

$$[1-1 + 1-2 + 1-3 + \dots + 1-n]$$

میں رکھنے سے بخوبی واضح ہے کیونکہ جب لا کو کافی چھوٹی قیمت دی جاتی ہے تو رقم  $1-n$  کی  
 قیمت خطوط وحدانی کے اندر کی تمام دوسری رقموں کی مجموعی قیمت سے بڑی  
 ہوتی ہے اور اس لئے جملہ کی علامت  $1-n$  کی علامت پر منحصر ہوگی۔

۶۔ متغیر کو بڑھانے سے یا گھٹانے سے کثیر الارقام کی شکل تبدیل ہوتی ہے۔ (8)

مشتق تفاعل۔

اب ہم اس شکل کا امتحان کریں گے جو کثیر الارقام اختیار کرتا ہے جبکہ لائی بجائے  
 $1-n$  درج کیا جائے۔ اگر ہم کو لائن نامثبت فرم کریں تو کثیر الارقام کی شکل  
 حاصل ہوگی وہ متغیر کے اضافہ کے جواب میں ہوگی اور اس میں اگر  $1-n$  کی علامت بدل دی جائے



پہلے کیا جائے۔ اس سر کوٹ (لا) سے تعبیر کرتے ہیں اور اس کوٹ (لا) کا دوسرا مشتق لیتے ہیں۔ بالکل اسی طرح کے طریق عمل سے یکے بعد دیگرے ہر کے دوسرے سرور کو حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اور اس لئے ترقیم متذکرہ بالا کو استعمال کرنے سے ہم نتیجہ بالا کو شکل ذیل میں ظاہر کر سکتے ہیں:-

$$ف (لا + ہ) = ف (لا) + ہ ف (لا) + \frac{ہ^2}{2 \times 1} ف (لا) + \frac{ہ^3}{3 \times 2 \times 1} ف (لا) + \dots + \frac{ہ^n}{n!}$$

یہ یاد رہے کہ چونکہ لا اور ہ کو آپس میں بدل دینے سے ف (لا + ہ) بدل نہیں جاتا اس لئے اس کے پھیلاؤ کو شکل ذیل میں بھی رکھا جاسکتا ہے۔

$$ف (لا + ہ) = ف (ہ) + لا ف (ہ) + \frac{لا^2}{2 \times 1} ف (ہ) + \dots + \frac{لا^n}{n!}$$

ہم بالعموم وہ ترقیم استعمال کریں گے جو جہاں سمجھائی گئی ہے۔ بعض اوقات مشتق تغایل ف (لا)، ف (لا)، ف (لا)..... کو بنظر سہولت ف (لا)، ف (لا)، ف (لا)..... سے بھی تعبیر کیا جائیگا۔ مثلاً ایسی صورت میں ف (لا + ہ) کے پھیلاؤ کو حسب ذیل شکل میں بیان کیا جائیگا۔

$$ف (لا + ہ) = ف (ہ) + لا ف (ہ) + \frac{لا^2}{2 \times 1} ف (ہ) + \frac{لا^3}{3 \times 2 \times 1} ف (ہ) + \dots + \frac{لا^n}{n \times \dots \times 3 \times 2 \times 1} ف (ہ) + \dots$$

## مثال

کثیرالارقام ۴ لا + ۶ لا - ۷ لا + ۴ لا میں لاکھ بجائے لا + ہ مندرج کریں تو نتیجہ معلوم کرو۔

یہاں

$$ف (لا) = ۴ لا + ۶ لا - ۷ لا + ۴ لا$$

$$ف (لا) = ۱۲ لا + ۱۲ لا - ۷ لا$$

$$ف (لا) = ۲۲ لا + ۱۲$$

$$ف (لا) = ۲۲$$

اور اس لئے نتیجہ ہوگا  $۴ لا + ۶ لا - ۷ لا + ۴ + ۱۲ (لا + لا - ۷) + \frac{۲}{۴} (۱۲ + لا)$   
 $۲۲ + \frac{۳}{۳ \times ۲ \times ۱}$  - اندراج کے عمل سے اس کی تصدیق طالب علم خود کر لے۔

۷۔ لا کے ایک منطق مکملہ تفاعل کا تسلسلہ: اگر ایک منطق اور مکملہ تفاعل

ف (لا) میں لا کی قیمت لا انتہا چھوٹے اضافوں کے ساتھ ایک مقدار ۱ سے ایک  
 دوسری بڑی مقدار ب تک بدلی جائے تو ہم ثابت کریں گے کہ ف (لا) کی قیمت بھی اس اثناء  
 میں لا انتہا چھوٹے اضافوں کے ساتھ بدلتی جائے گی۔ یہ الفاظ دیگر ہم ثابت کریں گے  
 کہ ف (لا) لا کے ساتھ تسلسل بدلتا ہے۔

فرض کر دو کہ لا ۱ سے ۱ + ۱ ہو جائے تو اس کے جواب میں ف (لا) کا اضافہ ہوگا

ف (۱ + ۱) - ف (۱)

اور یہ دفعہ ۶ کی رو سے

$$۱ + \frac{۲}{۲ \times ۱} + (۱) + \dots + ۱ + ۱$$

کے مساوی ہے جس میں ف (۱) ف (۱) ..... محدود مقدار میں ہیں۔ اب دفعہ ۵  
 کے مسئلہ سے اس آخری جملہ کی قیمت ۱ + ۱ کو کافی چھوٹا لینے سے کسی مقررہ مقدار  
 سے کم بنایا جاسکتا ہے پس ف (۱ + ۱) اور ف (۱) کا فرق اتنا چھوٹا بنایا  
 جاسکتا ہے جتنا ہم چاہیں اور یہ فرق بالآخر ۱ کے ساتھ صفر ہو جائیگا۔ ۱ سے ب تک  
 لا کے تغیر کی تمام منزلوں میں یہ بات درست رہتی ہے اور اس لئے ف (لا) کا تسلسل  
 ثابت ہو جاتا ہے۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ ہم نے یہاں یہ ثابت نہیں کیا ہے کہ ف (۱)  
 سے ف (ب) تک ف (لا) مسلسل بڑھتا ہے۔ ف (لا) تسلسل بڑھ سکتا  
 ہے یا مسلسل گھٹ سکتا ہے یا چند مقامات پر بڑھتا اور باقی مقامات پر گھٹتا  
 ہے لیکن ثبوت بالا سے ظاہر ہے کہ وہ ایک قیمت سے دوسری قیمت دفعتاً  
 یا وقت واحد میں اختیار نہیں کر سکتا اور اس لئے جب 'لا' ۱ سے ب تک



سلسل بڑھتا ہے تو ف (لا) کی تمام متناظر قیمتیں ف (ا) اور ف (ب) کے درمیان واقع ہونی چاہئیں۔ ف (لا) کی علامت سے یہ معلوم ہو سکیگا کہ ف (لا) آیا بڑھ رہا ہے یا گھٹ رہا ہے۔ کیونکہ دفعہ ۵ سے یہ بات واضح ہے کہ ہر کافی چھوٹا ہو تو پورے اضافہ کی علامت رقم ۷ ف (ا) کی علامت پر منحصر ہوتی ہے۔ پس اہم دیکھتے ہیں کہ جب ف (ا) مثبت ہو تو ف (لا) لائے ساتھ بڑھتا ہے اور ف (ا) منفی ہو تو ف (لا) لائے بڑھنے سے گھٹتا ہے۔

۸۔ خارج قسمت اور باقی کی شکل جبکہ کسی کثیر الارقام کو ایک

شتمانی جملہ سے تقسیم کیا جائے :- فرض کرو کہ کثیر الارقام

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots$$

(11) کو لا-۵ سے تقسیم کرنے پر خارج قسمت حاصل ہوتا ہے

$$b_{-1}^{(k)} + b_{-2}^{(k)} + \dots + b_{-n}^{(k)} + b_{-n-1}^{(k)}$$

اس کوق سے اور باقی کو م سے تعبیر کرو تو مساوات ذیل حاصل ہوگی

ف (لا) = (لا - هـ) ق + و

اس مساوات کے یہ معنی ہیں کہ اگر ق کو لا - ہر سے ضرب دیکر اس میں مجموعہ کیا جائے تو نتیجہ (لا) کے مماثل ہونا چاہئے اور اس کی ہر رقم ف (لا) کی متناظر رقم کے مماثل ہونی چاہئے اس قسم کی مساواتوں کو دوسری مساواتوں سے جو تہائیات نہیں ہوتیں ممتاز کرنے کے لئے مساوات کی معمولی علامت استعمال کرنے کی بجائے علامت بالا اختیار کرنا سہولت بخش ہوگا۔ تہائے کی بائیں جانب کا جملہ ہے

[illegible]

دو نوں جانبوں کے لاکھ سہروں کو مساوی رکھنے سے حسب ذیل مساواتیں حاصل

ہوتی ہیں جن سے ب، ب، ب، ب، ..... ب کا تعین ہو جاتا ہے۔

$$ب = ا$$

$$ب = ب + ا$$

$$ب = ب + ا$$

$$ب = ب + ا$$

.....

$$ب - ا = ب - ا + ا - ا$$

$$ب = ب - ا + ا$$

ان مساواتوں سے خارج قسمت کے سروں ب، ب، ب، ..... کو اور باقی کو یکے بعد دیگرے آسانی کے ساتھ حاصل کرنیکا طریقہ ملتا ہے۔ اس غرض کے لئے ہم سلسلہ اعمال کو حسب ذیل طریقہ میں لکھ سکتے ہیں۔

$$\begin{array}{ccccccc} ا & ا & ا & ا & ا & ..... & ا \\ ب & ب & ب & ب & ب & ..... & ب - ا \end{array}$$

پہلی سطر میں (۱) کے سر علی الترتیب لکھے گئے ہیں۔ دوسری سطر کی پہلی رقم (۱) کو (یا ب کو جو اس کے مساوی ہے) ا سے ضرب دیکر حاصل کی گئی ہے اور حاصل ضرب ب، ب، ب، ..... کے نیچے رکھ کر اسے ا میں جمع کرنے سے تیسری سطر کی پہلی رقم ب حاصل کی گئی ہے۔ اس حاصل شدہ رقم کو ا سے ضرب دیکر ا کے نیچے رکھا گیا ہے اور حاصل ضرب کو ا میں جمع کر کے تیسری سطر کی دوسری رقم حاصل کی گئی ہے۔ اس عمل کی تکرار سے خارج قسمت کے تمام سر یکے بعد دیگرے حاصل ہوتے جائینگے اور اس طور پر حاصل شدہ آخری مقدار باقی کو تبصیر کرے گی۔ چند مثالوں سے اس طریقہ کی

وضاحت ہو جائے گی۔

### امثلہ

۱۔ خارج قسمت اور باقی معلوم کرو جبکہ ۳ لا۔ ۵ لا۔ ۱۱ لا۔ ۶۱ کو لا۔ ۳ سے تقسیم کیا جائے۔ محسوب کرنے کا طریقہ حسب ترتیب ذیل ہوگا۔

$$\begin{array}{r} ۳ - ۵ - ۱۰ - ۱۱ - ۶۱ \\ ۹ - ۱۲ - ۶۶ - ۲۳۱ \\ \hline ۴ - ۲۲ - ۴۴ - ۱۰۰ \end{array}$$

اس لئے خارج قسمت ۳ لا۔ ۴ لا۔ ۲۲ لا۔ ۴۴ اور باقی ۱۰۰ ہے۔

۲۔ خارج قسمت اور باقی معلوم کرو جبکہ ۵ لا۔ ۳ لا۔ ۲ کو لا۔ ۱ سے تقسیم کیا جائے۔  
جواب ق = لا۔ ۶ + لا۔ ۹

$$۱۱ = ۴$$

۳۔ ق اور ۳ معلوم کرو جبکہ لا۔ ۴ لا۔ ۱۱ لا۔ ۱۳ کو لا۔ ۵ سے تقسیم کیا جائے۔  
نوٹ۔ اگر کسی کثیر الارقام میں کوئی رقم غائب ہو تو ف (لا) کے سر لکھتے وقت اس رقم کے سر کے بجائے صفر لکھنا ہو گا مثلاً اس مثال میں پہلی سطر اس طرح لکھی جائے گی۔

$$۱ - ۴ - ۰ - ۱۱ - ۱۳$$

$$\text{جواب ق} = لا۔ ۱۲ + لا۔ ۲۰ + لا۔ ۲۸۹ = ۱۴۳۲$$

۴۔ ق اور ۳ معلوم کرو جبکہ لا۔ ۳ لا۔ ۱۵ لا۔ ۲ کو لا۔ ۲ سے تقسیم کیا جائے۔

$$\text{جواب ق} = لا۔ ۲ + لا۔ ۴ + لا۔ ۱۴ + لا۔ ۲۸ + لا۔ ۵۶$$

$$+ لا۔ ۱۱۲ + لا۔ ۲۰۹ + لا۔ ۴۱۸ = ۸۳۸$$

۵۔ ق اور ۳ معلوم کرو جبکہ لا۔ لا۔ ۱۰ لا۔ ۱۱ کو لا۔ ۴ سے تقسیم کیا جائے۔

$$\text{جواب ق} = لا۔ ۴ + لا۔ ۱۶ + لا۔ ۶۳ + لا۔ ۲۴۲ = ۸۵۵$$

تفاعلوں کی جدول۔ اگر کسی کثیر الارقام کے سر دئے ہوئے اعداد ہوں تو دفعہ گزشتہ کی عدد سے ہم یہ آسانی لاکھیں قیمت کے جواب میں ف (لا) کی

قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔  
کیونکہ مساوات

ف (لا) = (لا - ۵) ق + س  
پوری ہونی چاہیے خواہ لا کی بجائے کوئی مقدار درج کی جائے کیونکہ اس کے طرفین  
مثلاً مساوی ہیں۔

فرض کر دو لا = ۵ تو ف (۵) = س، کیونکہ لا = ۵۔ اور ق محدود ہے۔  
پس ف (لا) میں لا کی بجائے ۵ درج کرنے سے ہم وہ باقی حاصل کرتے ہیں  
جو ف (لا) کو لا = ۵ سے تقسیم کرنے پر ملتا ہے۔ اس باقی کو گزشتہ دفعہ کی مدد سے ہ آسانی  
معلوم کیا جاسکتا ہے۔

مثلاً دفعہ ۸ کی مثال (۱) کے کثیر الارقام

$$۳ لا - ۵ لا + ۱۰ لا + ۱۱ لا - ۴۱$$

میں لا کی بجائے ۳ درج کرنے سے ۱۷۰ حاصل ہوتا ہے جبکہ کثیر الارقام کو لا = ۳  
سے تقسیم کرنے کی صورت میں باقی ہے۔ طالب علم عملی طور پر ۳ درج کر کے اسکی  
تصدیق کر سکتا ہے۔  
کثیر الارقام

$$لا + لا - ۱۰ لا + ۱۱ لا$$

میں لا کی بجائے ۲ درج کرنے سے ۸۵۵ حاصل ہوتا ہے جیسا کہ دفعہ ۸ کی  
مثال ۵ سے ظاہر ہے۔ ہم نے دفعہ ۷ میں یہ دیکھا ہے کہ جب لا = ۵ سے ۵۵ +  
تک بڑھنی والی قیمتوں کا ایک مسلسل سلسلہ اختیار کرتا ہے تو اس سلسلہ کے جواب میں ف (لا)  
بھی ایک مسلسل سلسلہ میں سے گزرتا ہے۔

اگر ہم کسی کثیر الارقام میں جس کے سرورے ہوئے اعداد پہلے لا کی بجائے یکے  
بعد دیگرے اعداد کا ایک مسلسل سلسلہ درج کریں مثلاً سلسلہ

$$۵ - ۴ - ۳ - ۲ - ۱ - ۰ - ۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ \dots$$

کے اعداد اور ان کے جواب میں ف (لا) کی قیمتوں کو محسوب کریں تو اس عمل کو ہم  
تفاعل کی جدول بنانے کا عمل کہہ سکتے ہیں۔



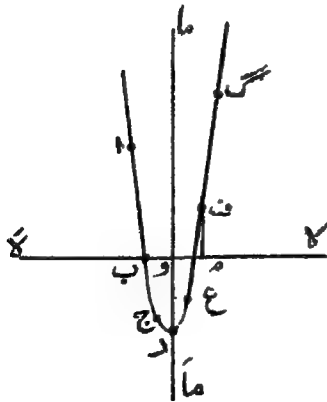


میں فن (لا) کی قیمتیں معلوم کی جائیں۔ لاکہ قیمتوں کو فضلہ اور فن (لا) کی تناسل قیمتوں کو معین قرار دیکر نقطے مرتسم کئے جائیں تب بالعموم یہ ممکن ہوگا کہ ہم ان نقطوں میں سے ایک ایسا منحنی کھینچ سکیں جو تفاعل کی قیمتوں پر ردشہنی ڈالے اور جس سے تفاعل کی نوعیت کا اندازہ ہو سکے۔ اس رسمیں تبصیر کی صحت بلاشبہ ان نقطوں کی تعداد کے ساتھ بڑھتی ہوئی قیمتوں کے درمیان معلوم کئے گئے ہوں۔

جب کسی دو مجوزہ حدود کے اندر منحنی کے کسی حصہ کا احتیاط سے امتحان کرنا ہو تو ان حدود کے درمیان متغیر کو ایسی قیمتیں دینا کہ ضروری ہوگا جن میں سے کسی دو متعلقہ قیمتوں کا فرق اکائی سے چھوٹا ہو۔ امثلہ ذیل سے ان اصولوں کی توضیح ہوگی۔

### امثلہ

۱۔ لا + لا - ۶ کی رسم معلوم کرو۔  
 طول کی اکائی ود کا ۱/۲ لی گئی ہے (شکل ۲)۔  
 دفعہ ۹ کی مثال (۱) میں - ۳ سے + ۳ تک بشمول ہر دو اعداد لاکہ صحیح حدودی قیمتوں کے جواب میں فن (لا) کی قیمتیں دی ہوئی ہیں۔



شکل (۲)

ان قیمتوں کی مدد سے منحنی پر کے نو نقطے معلوم ہو سکتے ہیں۔  
 جن میں سے سات 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د'، 'ع'، 'ف'، 'گ' یہاں مرتسم کئے گئے ہیں باقی دو نقطے اس شکل کے حدود سے باہر واقع ہیں۔

ج اور ع کے درمیان منحنی کو زیادہ صحت کے ساتھ مرتسم کرنا طالب علم کے لئے ایک مفید مشق ہوگی۔ یہ اس طرح ہو سکتا ہے کہ

۱۔ اور ۱ کے درمیان لا کی بہت سی قیمتوں مثلاً ان تمام قیمتوں کے جواب میں جن کا فرق  $\frac{1}{2}$  ہے ف (لا) کی قیمتیں معلوم کی جائیں۔ ذیل کی مثال میں اس قسم کا عمل کیا گیا ہے۔

۲۔ کثیر الارقام

$$۱۰ لا^۲ - ۷ لا + ۶$$

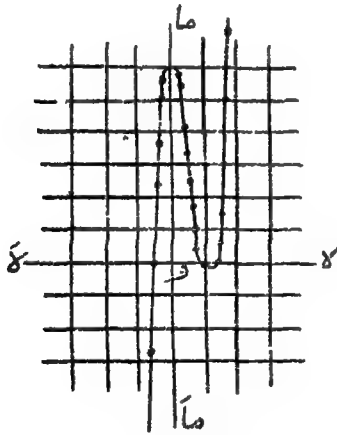
16

کو مرتب کر دو۔

۴ اور ۴ کے درمیان لا کی قیمتوں کے لئے اس تفاعل کی جدول دفعہ ۹ میں حاصل کر لی گئی ہے۔

دفعہ ۴ کی مشق کے طور پر یہ مشاہدہ کیا جاسکتا ہے کہ ۷ سے بڑھی لا کی تمام مثبت قیمتوں کے لئے یہ تفاعل ہمیشہ مثبت رہتا ہے اور ۷ سے چھوٹی ۰۰ تک لا کی تمام قیمتوں کے لئے تفاعل منفی قیمت رکھتا ہے۔ پس اگر مخنی محور لا کو قطع کرے گا تو ایسے نقطہ (یا نقطوں) پر قطع کرے گا جو ۷ اور ۷ سے ۷ کے درمیان لا کی کسی قیمت (یا قیمتوں) کے جواب میں ہے۔ اس لئے اگر ہمارا مقصد صرف سادہ

ف (لا) = ۰ کی اصولوں کے مقامات کا تعین کرنا یا ان کو تقریبی طور پر معلوم کرنا ہو تو جدول کو صرف ۷ اور ۷ کے درمیانی وقفہ تک محدود رکھا جاسکتا ہے۔



شکل (۳)

یہ ایسی صورت ہے جس میں لا کی صرف صحیح عددی قیمتوں کے اندراج سے مخنی کو مرتب کرنے میں بہت کم مدد ملتی ہے۔ اور اس لئے لا کو ایسی قیمتیں دیں ہوں گی جن میں

سے کسی دو متعلقہ قیمتوں کا باہمی فرق بہت چھوٹا ہو۔ جدول ذیل میں ہم نے اعداد صحیح ۷ اور ۷ اور ۷ کے درمیان  $\frac{1}{2}$  کے وقفوں سے کام لیا ہے۔ ان قیمتوں سے مخنی پر کے تناظر نقطہ تقریبی طور پر حاصل کئے جاسکتے ہیں اور مخنی کو مرتب کیا جاسکتا ہے۔

دیکھو شکل (۳)



۱ -	۵۹ -	۵۸ -	۵۷ -	۵۶ -	۵۵ -	۵۴ -	۵۳ -	۵۲ -	۵۱ -
۲۲ -	۱۵۵۹۶ -	۱۰۶۸ -	۶۵۴۶ -	۲۵۸۸ -	۰	۲۵۲۲	۲۵۲۲	۲۵۲۲	۲۵۲۲
۵۱ -	۵۲ -	۵۳ -	۵۴ -	۵۵ -	۵۶ -	۵۷ -	۵۸ -	۵۹ -	۶۰ -
۳۵۹	۵۵۰۴	۳۵۳۳	۳۵۵	۲۵۶۴	۱۵۰۴	۵۹۲	۵۹۲	۵۹۲	۵۹۲

۱ -	۵۱ -	۵۲ -	۵۳ -	۵۴ -	۵۵ -	۵۶ -	۵۷ -	۵۸ -	۵۹ -
۶۱ -	۵۵۹۴	۵۵۶	۵۵۰۴	۳۵۳۳	۳۵۵	۲۵۶۴	۱۵۰۴	۵۹۲	۵۹۲
۱ -	۱۵۱ -	۱۵۲ -	۱۵۳ -	۱۵۴ -	۱۵۵ -	۱۵۶ -	۱۵۷ -	۱۵۸ -	۱۵۹ -
۱۵۱۴	۱۵۱۴	۱۵۱۴	۱۵۱۴	۱۵۱۴	۱۵۱۴	۱۵۱۴	۱۵۱۴	۱۵۱۴	۱۵۱۴

مثال (۱) میں مرسم شدہ منحنی محور لا کو دو نقطوں پر قطع کرتا ہے (یعنی جن کی تعداد کثیرالارقام کے درجہ کے مساوی ہے) دوسرے الفاظ میں لا کی دو قیمتیں ایسی ہیں جن کے لئے دئے ہوئے کثیرالارقام کی قیمت صفر ہوتی ہے مساوات  $۲ + لا - ۴ = ۰$  کی اصلیں یہ قیمتیں ہونگی یعنی ۲ اور ۱۵۵ -

اسی طرح مثال (۳) میں مرسم شدہ منحنی محور لا کو تین نقطوں پر قطع کرتا ہے یعنی ان نقطوں پر جو کبھی مساوات  $۱۰ - لا + ۱۴ - لا + ۴ = ۰$  کی اصلوں کے جواب

میں ہیں۔ یہ ممکن ہے کہ دئے ہوئے کثیرالارقام کو تعبیر کر دیا لا منحنی محور لا کو قطع نہ کرے یا اتنے نقطوں پر قطع کرے جن کی تعداد کثیرالارقام کے درجہ سے کم ہو۔ ایسی صورتیں مساواتوں کی خیالی اصلوں سے متعلق ہوتی ہیں جن پر باب آئندہ میں تفصیلی بحث کی جائیگی مثلاً کثیرالارقام  $۲ + لا + لا + ۲$  کو تعبیر کرنے والا منحنی بالکلہ محور لا کے اوپر واقع ہوتا ہے

ہم دیکھتے ہیں کہ اس تفاعل اور مثال (۱) کے تفاعل میں صرف مستقل ۸ کا فرق ہے اس لئے اس کی قیمت مثال (۱) کے تفاعل کی حاصل شدہ قیمت پر ۸ مرتبہ جمع کرنے سے حاصل ہوتی ہے اور پورا منحنی مرسم شدہ منحنی کو محور لا (۸) کا

ایک یوں کے فاصلہ تک اوپر وار حرکت دینے سے حاصل ہو سکتا ہے۔ مساوات  $۲ + لا + لا + ۲ = ۰$  کو حل کرنے سے یہ ظاہر ہے کہ منحنی لا کی وہ دو قیمتیں جو کثیرالارقام کو صفر بناتی ہیں اس صورت میں خیالی ہیں۔ منحنی محور لا کو جن نقطوں پر قطع کرتا ہے ان کی تعداد کثیرالارقام کے درجہ سے کم ہوتی ہے کہ منحنی محور لا کو

خیالی نقطوں پر قطع کرتا ہے۔

۱۱۔ کثیرالارقام کی اعظم اور اقل قیمتیں۔ دفعات ماسبق سے یہ بات

ظاہر ہے کہ جب متغیر لا۔ سے +  $\infty$  تک بدلتا ہے تو تفاعل ف ( لا ) میں بہت سے تغیرات واقع ہو سکتے ہیں۔ یہ ہو سکتا ہے کہ وہ کسی وقفہ میں بڑھتا جائے اور پھر بڑھنا چھوڑ دے اور گھٹنا شروع کرے۔ پھر گھٹنا چھوڑ دے اور مکرر بڑھنا شروع کرے جسکے بعد ممکن ہے کہ تفاعل کچھ وقفہ تک پھر گھٹنے لگے یا مسلسل بڑھتا جائے (جیسا کہ دفعہ ماسبق کی آخری مثال سے ظاہر ہے) اس نقطہ پر جہاں تفاعل بڑھنا چھوڑتا ہے اور گھٹنا شروع کرتا ہے ہم کہتے ہیں کہ تفاعل نے اعظم قیمت اختیار کی ہے اور جب تفاعل گھٹنا چھوڑتا ہے اور بڑھنا شروع کرتا ہے تو ہم کہتے ہیں کہ تفاعل نے اقل قیمت اختیار کی ہے تفاعل کی ایسی قیمتیں متعدد ہو سکتی ہیں۔ عام طور پر ان کی تعداد کثیرالارقام کے درجہ پر منحصر ہوگی۔ سوائے تریجی تفسیر کے اور کوئی چیز تفاعل کی اعظم یا اقل قیمت کے وقوع کو اتنی وضاحت سے ظاہر نہیں کر سکتی، نیز ان تغیرات کو بھی جو تفاعل کی قیمتیں اختیار کرتی ہیں۔

18

دئے ہوئے کثیرالارقام کو مرتبہ کرتے وقت تفاعل کی اعظم اور اقل قیمتوں سے واقف ہونا سخی کو مرتبہ کرنے میں بڑی مدد دیتا ہے کیونکہ ان سے ان نقطوں کے محل حاصل ہو گئے ہیں جہاں سخی محور کے حوالہ سے جڑتا ہے۔ کسی آئینہ باب میں ہم یہ بتائیں گے کہ ان نقطوں کا تعین ایسی مساوات کے حل پر منحصر ہوتا ہے جس کا درجہ دئے ہوئے تفاعل کے درجہ سے بقدر ایک کے کم ہو۔

یہ بتانا آسان ہے کہ اعظم اور اقل قیمتیں یکے بعد دیگرے وقوع پذیر ہوتی ہیں کیوں کہ ایک قیمت اعظم کے جواب میں متغیر کی ایک قیمت حاصل ہوگی اور دوسری قیمت اعظم کے جواب میں دوسری۔ جب متغیر اپنی پہلی قیمت سے دوسری قیمت تک بڑھتا ہے تو تفاعل گھٹنے سے ابتدا کرتا ہے اور بڑھنے پر ختم ہوتا ہے اور اس لئے ان دو اعظم قیمتوں کے درمیان کسی منزل پر ایک اقل قیمت اختیار کرتا ہے۔ اسی طرح یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ دو اقل قیمتوں کے درمیان ایک اعظم قیمت ہونی چاہیئے۔

## دوسرا باب

### مساواتوں کے عام خواص

۱۲۔ تفاعل (لا) کو مرتسم کرنے کا عمل جس کی تشریح دفعہ (۱۰) میں کی گئی ہے ایک دی ہوئی عددی مساوات کی حقیقی اصلوں کو تقریبی طور پر معلوم کرنے میں استعمال ہو سکتا ہے کیونکہ جب کسی تفاعل کے جواب میں منحنی کو صحیح طور پر مرتسم کر دیا جاتا ہے تو مساوات (لا) = کی حقیقی راہیں پیدا ہوتی ہیں۔ ان نقصوں سے کہ فاصلوں کو ناپنے سے تقریبی طور پر معلوم ہوتی ہیں جن پر منحنی محور کو قطع کرتا ہے۔ اس مسئلہ کا عددی حل زیادہ صحیح طور پر معلوم کرنے اور نیز عددی اور جبری دونوں قسم کی مساواتوں پر بحث کر نیکی خیال سے اس باب میں ہم مساواتوں کی اہم ترین عام خاصیتوں کو اصلوں کی تعداد، ان کے وجود اور حقیقی و خیالی اصلوں کے درمیان فرق کے حوالہ سے ثابت کریں گے۔

مسئلہ ذیل کی مدد سے اکثر یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ کسی مساوات میں حقیقی اصل کا وجود ہونے یا نہ ہونے کا جواب

مسئلہ۔ اگر کسی غیر از تمام (لا) میں جہول مقدار لا کی بجائے دو حقیقی مقداریں (ا) اور (ب) درج کیجے ایسے اور اگر ان اندراجات کے نتیجے مختلف علامت ہوں یعنی ایک منفی اور دوسرا مثبت تو مساوات (لا) = کی کم از کم ایک اصل حقیقی ہوگی جس کی قیمت (ا) اور (ب) کے درمیان واقع ہوگی۔

ہم نے دفعہ (۷) میں یہ ثابت کیا ہے کہ تفاعل (لا) کی ایک خاصیت

اس کا تسلسل ہے۔ مسئلہ بالا تفاعل کی اس خاصیت سے فوراً اخذ ہو سکتا ہے کیونکہ جب  $\Delta$  سے  $\Delta$  تک بدلتا ہے تو  $f$  (لا) بھی  $f$  (ا) سے  $f$  (ب) تک تسلسل بدلتا ہے اور اس لئے تمام درمیانی قیمتوں کو یکے بعد دیگرے اختیار کرتا ہے۔ اب چونکہ  $f$  (ا) اور  $f$  (ب) میں سے ایک مقدار مثبت اور دوسری منفی ہے اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ  $\Delta$  اور  $\Delta$  کے درمیان  $\Delta$  کی کسی خاص قیمت کے لئے جو  $f$  (لا) اور  $f$  (ب) کے درمیان واقع ہے  $f$  (لا) صفر قیمت اختیار کرتا ہے۔

20

تفاعل کی تسبیح مساوم کرنے سے غالب علم کو اس مسئلہ کے سمجھنے میں بہت مدد ملیگی یہاں جو بات ثابت کی گئی ہے اس پر برہنہ شکل دیکھنے سے بالکل واضح ہو جائے گی وہ یہ ہے کہ اگر کثیر الارقام کو تعبیر کرنے والے منحنی کے دو نقطے محور  $\Delta$  کی مخالف سمتوں میں ہوں یعنی ایک نقطہ محور  $\Delta$  کے اوپر اور دوسرا اس کے نیچے تو ان نقطوں کے ملائے والا منحنی محور کو کم از کم ایک بار قطع کرے گا۔ شکل دیکھنے سے یہ بھی معلوم ہو گا کہ  $\Delta$  اور  $\Delta$  کے درمیان مختلف قیمتیں ہو سکتی ہیں جن کے لئے  $f$  (لا) = - یعنی جن کے لئے منحنی محور کو قطع کرتا ہے مثلاً دفعہ (۱۰) شکل (۳) میں  $\Delta = ۲$  سے تفاعل کی منفی قیمت (-۱۴۴) اور  $\Delta = ۲$  سے تفاعل کی مثبت قیمت (۲۰) حاصل ہوتی ہے اور ان نقطوں کے درمیان منحنی محور  $\Delta$  کو تین جگہ قطع کرتا ہے۔

نتیجہ صریح۔ اگر کوئی ایسی حقیقی مقدار موجود نہ ہو جس کے اندراج سے  $f$  (لا) = ہو جائے تو  $\Delta$  کا ہر حقیقی قیمت کے لئے  $f$  (لا) مثبت ہونا چاہیے۔

کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ (دفعہ ۴)  $\Delta = ۰$  رکھنے سے  $f$  (لا) مثبت ہو جاتا ہے اور اس لئے  $\Delta$  کی کوئی قیمت اس کو منفی نہیں بنا سکتی اس وجہ سے کہ اگر اس قسم کی کوئی قیمت ہو تو اس دفعہ کے مسئلہ سے مساوات کی ایک حقیقی اصل موجود ہونی چاہیے اور یہ عارضہ مفروضہ کے خلاف ہے۔ ترکیبی طریقہ کے لحاظ سے اس مسئلہ کو یوں بیان کیا جاسکتا ہے:۔ جب مساوات  $f$  (لا) = کی کوئی اصل حقیقی نہ ہو تو  $f$  (لا) کو تعبیر کرنے والا منحنی بالکلیہ محور  $\Delta$  کے

اور واقع ہوگا۔

مس ۱۔ طاق درجے کی ہر سادات میں کم از کم ایک حقیقی اصل ایسی ہوتی ہے جسکی علامت مسادات کی آخری رقم کی علامت سے مختلف ہوگی۔

دفعہ ۱ سابق کے مسئلہ سے یہ نتیجہ فوراً اخذ ہوتا ہے۔ کثیر امارت قائم (لا)

میں لاکھ بجائے علی الترتیب -  $\infty + 1, 0, 1, \infty$  مندرجہ کردہ تو ن کے طاق ہونے کی وجہ سے (دیکھو دفعہ ۴) نتیجے ہونگے

$\infty = -$  کے لئے ف (لا) منفی

$\infty = 0$  کے لئے ف (لا) کی علامت وہی جو ان کی ہے

$\infty + =$  کے لئے ف (لا) مثبت

اگر ان مثبت ہوتو -  $\infty$  اور - کے درمیان مسادات کی ایک حقیقی منفی اصل ہونی چاہیئے۔

اور اگر ان منفی ہوتو صفر اور  $\infty$  کے درمیان مسادات کی ایک حقیقی مثبت اصل ہونی چاہیئے۔ اس طرح مسئلہ بالاثبات ہو گیا۔

مس ۲۔ حقت درجے کی ہر سادات میں جسکی آخری رقم منفی ہو کم از کم دو حقیقی اصلیں ہوتی ہیں ایک مثبت اور دوسری منفی۔

اس صورت میں -  $\infty + 1, 0, 1, \infty$  کے اندراج سے نتیجے ہونگے

لا کی قیمت ف (لا) کی علامت

$\infty -$

$\infty +$

پس -  $\infty$  اور صفر کے درمیان ایک حقیقی اصل اور صفر اور  $\infty$  کے درمیان دوسری حقیقی اصل موجود ہوتی چاہیئے یعنی کم از کم ایک حقیقی منفی اصل اور ایک حقیقی مثبت اصل موجود ہونی چاہیئے۔

اس دفعہ اور دفعہ ۱ سابق دونوں میں ہم نے صرف اصولوں کا وجود ثابت کرنے پر اکتفا کی ہے اور اس مقصد کے لئے لاکھ بجائے بہت بڑی مثبت یا منفی قیمتیں

درج کرنا کافی ہے جیسا کہ ہم نے کیا ہے۔ لیکن دفعہ ۴ کے مسئلہ کی مدد سے ان حدود کو تنگ کرنا فی الواقعی ممکن ہے جن کے اندر مساوات کی اصلیں واقع ہوتی ہیں کسی آئندہ باب میں اصلوں کے حدود سے متعلق ایسے مسئلے دئے جائیں گے جن کی مدد سے متذکرہ حدود کو اور زیادہ تنگ کرنا ممکن ہو جائے گا۔

۱۵۔ عام مساوات میں ایک اصل کی حدیں ۰ و ۱۔ خیالی اصلیں۔

ہم یہ ثابت کر چکے ہیں کہ ہر مساوات کی ایک حقیقی اصل ہوتی ہے سوائے اس صورت کے جبکہ مساوات جذبت درجہ کی ہو جس کی آخری رقم مثبت ہو۔ ایسی مساوات کے لئے یہ ممکن ہے کہ اس کی کوئی حقیقی اصل موجود نہ ہو۔ ایسی صورت میں یہ امتحان کرنا ضروری ہے کہ آیا کوئی ایسی قیمتیں موجود ہیں جن میں خیالی اکائی شامل ہے اور جن کو لاکر بجائے درج کرنے سے کثیر الارقام صفر کے مساوی ہو جاتا ہے۔ یا یہ کہ بعض صورتوں میں متغیر کی حقیقی اور خیالی دونوں قیمتیں ہیں جو مساوات کو پورا کرتی ہیں۔ ہم ایک سادہ مثال لیتے ہیں جس سے اس بات کی توضیح ہو جائے گی کہ مساواتوں کی خیالی اصلیں بھی ہو سکتی ہیں۔ جیسا کہ ہم پہلے بیان کر چکے ہیں (دفعہ ۱۰) کثیر الارقام

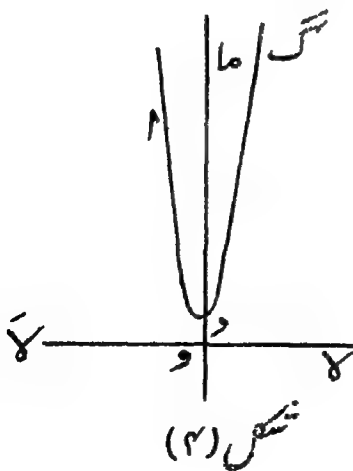
$$f(x) = x^2 + 1$$

کے جواب میں جو منفی ملتا ہے وہ کلا محور سلا کے اوپر واقع ہوتا ہے (دیکھو شکل (۴)۔

مساوات  $f(x) = 0$  کی کوئی حقیقی اصل نہیں ہے لیکن اس کی دو خیالی اصلیں

$$-\frac{1}{\sqrt{-1}} + \frac{1}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} - \frac{1}{\sqrt{-1}}$$

موجود ہیں جو مساوات حدبہ دوم



کو حل کرنے سے ظاہر ہے۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ حقیقی قیمتوں کی عدم موجودگی میں بصورت موجودہ دو خیالی جلے ایسے ہیں جو کثیر الارقام کو صفر کے مساوی بنا دیتے ہیں۔ چنانچہ عام مسئلہ یہ ہے کہ ہر منطق کلمہ مساوات میں ایک اصل شکل

$$17 \div 2 = 8$$

کی ہوتی ہے جہاں عہ اور بہ حقیقی محدود مقدار میں ہیں۔ اس بیان میں حقیقی اور خیالی دونوں اصلیں شامل ہیں کیونکہ بہ سے حقیقی اصل ملے گی۔ جب عہ اور بہ عدد ہوں تو جملہ عہ + بہ = ایک مطلق عدد کہتے ہیں۔ جو کچھ ہم نے دعویٰ کیا ہے وہ یہ ہے کہ ہر عددی مساواتیں ایک حقیقی یا مطلق اصل ہوتی ہے۔ چونکہ اس مسئلہ کے ثبوت میں ایسے اصولوں سے واسطہ پڑے گا جن کو یہاں بیان کرنا خالی از دقت نہیں ہے اور جو اپنے اپنے وقت پر اس کتاب کے مختلف حصوں میں بیان ہو گئے اس لئے ہم ان اصولوں کے تابیت ہو سنے تک اس مسئلہ کے ثبوت کو ملتوی کرتے ہیں۔ فی الحال ہم مسئلہ بالا کو تسلیم کئے لیتے ہیں اور اس سے چند نتیجے اخذ کرتے ہیں۔

۱۶۔ مسئلہ۔ ن درجے کی ہر مساوات کی ن اصلیں ہونگی اور اس سے زیادہ نہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ اگر مساوات (۱۷) = کی ایک اصل کوئی مقدار ہو تو (۱۸) = سے پورا پورا تقسیم ہو جائے گا۔ بات دہ ۹ سے ظاہر ہے کیونکہ اگر (۱۹) = یعنی اگر (۱۸) = کی اصل ہو تو مساوی کو صفر کے مساوی ہونا چاہیے۔

اب فرض کرو کہ دی ہوئی مساوات ہے

$$f(\lambda) = \lambda^n + b_{n-1}^{(f)}\lambda^{n-1} + \dots + b_1^{(f)}\lambda + b_0^{(f)} = 0.$$

اس مساوات کی ایک حقیقی یا خیالی اصل ہونی چاہیئے (دفعہ ۱۵) جسکو ہم علامت  $\mu$  سے تعبیر کریں گے۔ فرض کرو کہ  $f(\lambda)$  کو  $\lambda$  - عم سے تقسیم کرنے پر باقی قسمت

ف (۱۱) حاصل ہوتا ہے۔ تو ہمیں مساوات متماثلہ ملے گی

$$ف(۱۱) \equiv (۱۱ - عم) (ف(۱۱))$$

پھر مساوات ف (۱۱) = ۰ (۱۱ - ۱) درجہ کی ایک مساوات ہے، اس کی بھی ایک اصل ہونی چاہیے جسکو ہم عم سے تعبیر کریں گے۔

فرض کرو کہ ف (۱۱) کو لا - عم سے تقسیم کرنے پر خارج قسمت ف (۱۱) ہے۔

تو

$$ف(۱۱) \equiv (۱۱ - عم) (ف(۱۱))$$

$$اور \quad ف(۱۱) \equiv (۱۱ - عم) (۱۱ - عم) (ف(۱۱))$$

جہاں ف (۱۱) = ۰ (۱۱ - ۲) درجہ کا جملہ ہے۔

اس عمل کو جاری رکھ کر ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ ف (۱۱) = ۰ (۱۱ - ۱) اجزائے ضربی اور ایک عددی جزو ضربی ف (۱۱) کا حاصل ضرب ہے قبل الذکر اجزائے ضربی میں سے ہر ایک میں لا کی مرتبہ پہلی قوت ہی داخل ہوتی ہے۔ اب لا کے سروں کا مقابلہ کرنے سے یہ ظاہر ہے کہ ف (۱۱) = ۱ - اس لئے مساوات متماثلہ

$$ف(۱۱) \equiv (۱۱ - عم) (۱۱ - عم) (۱۱ - عم) \dots (۱۱ - عم) (۱۱ - عم)$$

حاصل ہوتی ہے۔

اب یہ ظاہر ہے کہ اس مساوات کے بائیں جانبی رکن میں لا کی بجائے

مقداروں عم، عم، عم، ..... عم میں سے کوئی ایک درج کی جائے تھیں رکن

صفر کے مساوی ہوتا ہے اور اس لئے ف (۱۱) بھی صفر کے مساوی ہوگا۔ یعنی

مساوات ف (۱۱) = ۰ کی اصلیں یہ مقداریں عم، عم، عم، ..... عم ہیں۔

ان اصلوں کے علاوہ کوئی اور اصلیں نہیں ہو سکتیں کیونکہ عم، عم، عم، ..... عم کے علاوہ کوئی اور مقدار مساوات یا لا کے بائیں جانبی رکن میں لا کی بجائے درج کی جائے

تو اس رکن کا کوئی جزو ضربی صفر نہیں ہوتا اور اس لئے حاصل ضرب صفر کے مساوی



نہیں ہو سکتا۔

**نتیجہ صریح**۔ لائیں  $n$  دیں درجہ کے دو کثیرالارقام  $la$  کی  $n$  قیمتوں سے زیادہ کے لئے ایک دوسرے کے مساوی نہیں ہو سکتے سوائے اس صورت کہ جب دونوں متانہ مساوی ہوں۔ کیونکہ اگر ان کے فرق کو صفر کے مساوی رکھا جائے تو ہمیں  $n$  دین درجہ کی مساوات ملے گی جو صرف  $la$  کی  $n$  قیمتوں سے پوری ہو سکتی ہے سوائے اس صورت کے جبکہ ہر سر علیحدہ علیحدہ صفر کے مساوی ہو۔

اگرچہ کہ اس دفعہ کے مسئلہ سے مساوات  $f(l) = 0$  کو حل کرنے میں کوئی مدد نہیں ملتی لیکن اس کی مدد سے اس کے عکس کو ہم پوری طرح حل کر سکتے ہیں یعنی جب مساوات کی اصلیں دی گئی ہوں تو مساوات معلوم ہو سکتی ہے۔ دی ہوئی اصلوں میں سے ہر ایک کو لائیں سے تفریق کرو۔ تو جتنی اصلیں ہیں اتنے ثنائی جملے حاصل ہونگے۔ ان ثنائی جملوں کو باہم ضرب دو تو مطلوبہ مساوات حاصل ہو جائے گی۔ اس مسئلہ کا ایک اور قاعدہ یہ ہے کہ جب دی ہوئی مساوات کی ایک یا ایک سے زیادہ اصلیں دی گئی ہوں تو ایسی مساوات معلوم ہو سکتی ہے جسکی اصلیں باقی نامعلوم اصلیں ہوں۔ اس غرض کے لئے ہمیں صرف یہ کرنا ہوگا کہ دئے ہوئے ثنائی اجزائے ضربی کے حاصل ضرب سے دی ہوئی مساوات کو تقسیم کر دیا جائے، خارج قسمت مطلوبہ کثیرالارقام ہوگا جو باقی اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہوگا۔

### امثلہ

۱۔ وہ مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں ہیں

$$x^3 - 15x^2 + 51x - 43 = 0$$

جواب :-  $x^3 - 15x^2 + 51x - 43 = 0$

۲۔ مساوات

$$x^4 - 14x^3 + 46x^2 - 43x + 10 = 0$$

کی ایک اصل ۵ ہے۔ وہ مساوات معلوم کرو جس کی اصلیں باقی نامعلوم اصلیں ہوں۔  
دفعہ ۸ کا تقسیم کا طریقہ استعمال کرو۔

جواب :-  $\bar{ا} - \bar{ا} + \bar{ا} - \bar{ا} = ۰$

۳ — مساوات

$$\bar{ا} - \bar{ا} + \bar{ا} - \bar{ا} = ۰$$

کی دو اصلیں ۱ اور ۲ ہیں۔ اس مساوات کو حل کرو۔

جواب :- باقی دو اصلیں ۳، ۴ ہیں۔

۴ — ایک مساوات کی اصلیں

$$\bar{ا} - \bar{ا} + \bar{ا} - \bar{ا} = ۰$$

ہیں۔ اس مساوات کو معلوم کرو۔

جواب :-  $\bar{ا} - \bar{ا} + \bar{ا} - \bar{ا} = ۰$

۵ — کبھی مساوات

$$\bar{ا} - \bar{ا} = ۰$$

کو حل کرو۔

یہاں یہ ظاہر ہے کہ  $\bar{ا} = \bar{ا}$ ، مساوات کو پورا کرتا ہے۔  $\bar{ا} - \bar{ا}$  سے تقسیم کر کے خارج  
کو حل کرو تو باقی دو اصلیں ہونگی

$$\bar{ا} - \bar{ا} + \bar{ا} - \bar{ا} = ۰$$

۶ — ایک مساوات کی ایک غیر منطقی اصل ہے۔

$$\bar{ا} + \bar{ا}$$

ہے۔ اس مساوات کو معلوم کرو اس طرح کہ اس کے سر منطقی ہوں۔

25

جذری علامتوں کے مختلف اجتماعوں کی وجہ سے اس جملہ کی چار مختلف قیمتیں ہونگی یعنی

$$\bar{ا} + \bar{ا}، \bar{ا} - \bar{ا}، \bar{ا} + \bar{ا}، \bar{ا} - \bar{ا}$$

اس لئے مطلوبہ مساوات ہے

$$(\bar{ا} - \bar{ا})(\bar{ا} + \bar{ا})(\bar{ا} - \bar{ا})(\bar{ا} + \bar{ا}) = ۰$$

$$(\bar{ا} - \bar{ا})(\bar{ا} + \bar{ا})(\bar{ا} - \bar{ا})(\bar{ا} + \bar{ا}) = ۰$$

یا بالآخر

$$\bar{ا} - \bar{ا} = ۰$$



فرض کرو کہ اس کثیرالارقام کی مطلق رقم میں ایک اور جیوٹا عدد اضافہ کرنے سے اس کو کمزور بدلیا گیا ہے تو ہمیں اس کی ایسی ترسیم ملے گی جس میں محور ولا منحنی کو صرف ایک حقیقی نقطہ پر قطع کرے گا یعنی اس نقطہ پر جو منحنی اصل کے جواب میں ہے۔ وہ دو نقطے جو مثبت اصولوں کے جواب میں تھے اب غائب ہو جائیں گے۔

مثلاً کثیرالارقام  $10x^2 - 11x + 28$  پر غور کرو جو دفعہ ۱۰ مثال (۱۲) کے کثیرالارقام میں ۲۲ جمع کرنے سے حاصل کیا گیا ہے اسکی ترسیم کو بآسانی کھینچا جاسکتا ہے شکل ۳ کے نقطہ (۱) کے جواب میں اب ایک ایسا نقطہ حاصل ہوگا جو محور لا کے بہت اوپر واقع ہوگا۔ لا + ۱ سے تقسیم کرو اور سہ رشتی جملہ (Trinomial) تین رقموں والا جملہ  $10x^2 - 11x + 28$  حاصل کرو جس میں بقیہ دو اصلیں موجود ہوں گی۔ یہ دو ہمیں اسانی سے معلوم ہو سکتی ہیں اور وہ ہیں

$$\frac{3917}{20} - \sqrt{\frac{3917^2}{400} - \frac{24}{20}}, \quad \frac{3917}{20} + \sqrt{\frac{3917^2}{400} - \frac{24}{20}}$$

ہم یہاں دیکھتے ہیں کہ جب کثیرالارقام کی شکل بدلی جاتی ہے اس غرض سے کہ ایک اصل غائب ہو جائے تو اس کے ساتھ ایک دوسری اصل بھی غائب ہو جاتی ہے اور ان کی جگہ خمیاں یا اصلوں کا ایک زوج لیتا ہے۔ اس کا سبب آئندہ دفعہ کے مسئلہ سے واضح ہوگا۔

۱۸۔ مساواتوں میں خیالی اصلیں زوج زوج داخل ہوتی ہیں۔

مسئلہ ثابت شدنی کو اس طرح بیان کیا جاسکتا ہے

اگر مساوات  $f(x) = 0$  کی ایک اصل، خیالی جملہ  $a + bi$  ہو اور مساوات کے تمام سرحقیقی مقادیر ہوں تو اس کی ایک اور اصل مزدوج خیالی جملہ  $a - bi$  بھی ہونی چاہیئے۔

مساوات ذیل متاثر ہے

$$(x - a - bi)(x - a + bi) = (x - a)^2 + b^2$$

$$= (x - a)^2 + b^2$$

فرض کرو کہ کثیر رقمی  $f$  (لا) کو اس متانندہ کے بائیں رکن سے تقسیم کیا گیا ہے اور اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ باقی  $سلا + سہ$  ہے تو مسودات متانندہ لے لی

$$f(لا) = \{ (لا - ع) + پ + ق + سلا + سہ$$

جہاں  $ق$ ،  $(ن - ۲)$  درجی خارج قسمت ہے۔ اس مساوات متانندہ میں  $لا$  کی بجائے  $ع + پ + سلا$  درج کرو تو بموجب فرض  $f(لا)$  صفر ہوگا لیکن اس سے  $(لا - ع) + پ$  بھی صفر ہوتا ہے۔ اسلئے

$$سلا (ع + پ + سلا) + سہ =$$

جس سے ہیں دو مساواتیں

$$سلا + سہ = سہ، سلا + پ =$$

ملتی ہیں کیونکہ حقیقی و خیالی حصے ایک دوسرے کو صفر نہیں بنا سکتے اور اس لئے ان کو علیحدہ علیحدہ صفر کے مساوی ہونا چاہیئے۔ پس

$$سلا = سہ، سہ =$$

اس طرح باقی  $سلا + سہ$  صفر ہو جاتا ہے اور اس لئے  $f(لا)$  دو اجزائے ضربی

$$لا - ع - پ + سلا، لا - ع + پ + سلا$$

کے حاصل ضرب سے پورا پورا تقسیم ہوتا ہے جس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اصل  $ع + پ + سلا$  کے ساتھ  $ع - پ + سلا$  کو بھی اصل ہونا چاہیئے۔

اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ حقیقی سرور والی کسی مساوات میں خیالی اصلوں کی تعداد ہمیشہ جفت ہوتی ہے اور ہر کثیر رقمی کو حقیقی اجزائے ضربی سے ترکیب یافتہ خیال کیا جاسکتا ہے جس میں خیالی اصلوں کے ہر زوج سے ایک حقیقی دو درجی جزو ضربی اور ہر حقیقی اصل سے ایک مفرد حقیقی جزو ضربی پیدا ہوتا ہے۔ کثیر رقمی کو ایسے اجزائے ضربی میں عملاً تجزیل کروینا مسودات کو پوری طرح حل کرنا ہے۔

ہم نے دفعہ ۱۷ میں یہ بیان کیا تھا کہ مساوی اصلوں کو حقیقی اور خیالی

اصولوں کے درمیان ملائیوالی کر ڈی خیال کیا جاسکتا ہے اس بیان کو اب دوسرے نقطہ نظر سے دیکھا جاسکتا ہے۔ فرض کرو کہ کثیر رتبی کا ایک دو درجی جزو ضربی (۱-۱) + ۲ ہے اور فرض کرو کہ ک کی قیمت میں چھوٹی تبدیلیوں کے ذریعہ کثیر رتبی کی شکل تبدیل کی گئی ہے۔ جب ک متغی ہوتا ہے تو اس دو درجی جزو ضربی حقیقی اصولوں کا ایک زوج حاصل ہوتا ہے۔ جب ک = ۰ تو اس جزو ضربی سے دو مساوی اصلیں عہ حاصل ہوتی ہیں اور جب ک مثبت ہو تو دو خیالی اصلیں ملتی ہیں۔

بالکل ایسے ہی ثبوت سے جیسے اوپر دیا گیا ہے یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ شکل ۱ + ۲ + ۱ کی اہم اصلیں مساواتوں میں زوج زوج داخل ہوتی ہیں جبکہ مساواتوں کے شریک ہوتے ہیں۔

## مثالیں

28

۱۔ وہ منطق کئی مساوات بناؤ جس کی اصلیں ہیں

$$1 - \sqrt{2} + 3 = 1$$

جواب: ۱-۱ + ۱۹ - ۱۳ = ۰

۲۔ وہ منطق مساوات بناؤ جس کی دو اصلیں ہیں

$$1 - \sqrt{2} + 5 = 1$$

جواب: ۱-۱۳ + ۲ + ۱۲ - ۱۱۲ + ۹۹ = ۰

۳۔ مساوات

$$1 - \sqrt{2} + 5 = 1 + 2 + 3 = ۰$$

کی ایک اصل

$$1 - \sqrt{2} + 2 = ۰$$

چھبیری اصلیں معلوم کرو۔ جواب: ۱-۱ + ۱، ۱-۱ + ۲ = ۰

۴۔ مساوات

$$1 - \sqrt{2} + 3 = 1 + 2 + 3 = ۰$$

کی ایک اصل  $2 + 7 = 9$  ہے۔ اس مسادات کو مل کر دے۔

جواب:  $2 \pm 7 = 9$ ۔

۱۹۔ ڈیکارٹ کا قانون علامت۔ مثبت اصلیں۔ اس قانون

کو استعمال کر کے کسی دی ہوئی مسادات کا صنف معائنہ کرنے سے ہم اس کی مثبت اصلوں کی تعداد کے لئے ایک علوی حد مقرر کر سکتے ہیں۔ اس قانون کو حسب ذیل طریقہ پر بیان کیا جاسکتا ہے۔

مسادات کی سب زموں کو دائیں جانب منتقل کر کے بائیں جانب صنف دیکھا جائے تو اس کے پہلے رکن کی رفتوں میں + سے - اور - سے + علامت کی تبدیلیاں ہوتی ہیں زیادہ مسادات کی مثبت اصلیں ہو سکیں۔

بہم فی الحال صرف ایتنا ثبوت پر اکتفا کرینگے جو عموماً دیا جاتا ہے۔ یہ ثبوت ڈیکارٹ کے اس مشہور مسئلہ سے ثابت ہو سکتا ہے کہ اگر اس منطقی صنف تصدیق کہنا یا نہ کہنا ہوگا۔ تیسرے درجہ کے مساویات کے متعلق بااقتور اور دیگر مستانیہ قوانین جو متقدمین - مساداتوں کی مثبت اصلیں اور خیالی اصلوں کی تعداد سے متعلق درج ذیل اصولوں (Budan) اور فوریر (Fourier) کے عام اصولوں سے متعلق ہیں۔

فرض کر دو کہ کسی تیسری درجہ کی علامتوں کے بعد دیگر سے ترتیب ذیل میں پیش ہوتی ہیں

+ - + + - - + - +

اس میں علامت کی تبدیلیاں کل سات ہیں جس میں + سے - اور - سے + دو وزن قہم کی تبدیلیاں شامل ہیں۔ یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ اگر اس کثیر رقی کو ایک ثنائی جڑ سے ضرب دیا جائے جس کی علامتیں ایک مثبت اصل کے جواب میں ہیں۔ تو اس کثیر رقی میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد ابستدائی کثیر رقی کے ہر نسبت کم از کم ہند ایک کے زیادہ ہوگی۔

ہم صرف علامتوں کو لکھتے ہیں جو عمل ضرب میں واقع ہوتی ہیں۔ اس طرح

- + - + + - - - + - + +

+ - + - - + + + - + - -

+ - + - + + + - + - + -

یہاں تیسری سطر میں جہاں کہیں دو مختلف علامتیں آتی ہیں وہ علامتیں ایک دوسرے کے برعکس ہوتی ہیں۔ اس صورت میں ہم دیکھتے ہیں (اور کسی دوسری ترتیب میں بھی یہی بات پیدا ہوگی) کہ عمل ضرب کا آخریہ ہوتا ہے کہ مبہم علامت ایسی جگہ داخل ہوتی ہے جہاں ابتدائی کثیر رتبی میں + کے بعد + یا - کے بعد - علامت آتی ہے۔ علامت کی تبدیلیوں کی تعداد ہرگز نہیں گھٹتی۔ لیکن ہمیشہ ایک تبدیلی آخر میں ضرور پیدا ہوتی ہے۔ اوپر کی مثال میں جہاں ابتدائی کثیر رتبی علامت کی ایک تبدیلی پر ختم ہوتا ہے یہ نتیجہ ظاہر ہے اگر کثیر رتبی ایک ہی علامت کی تکرار پر ختم ہو تو بھی یہ معلوم ہوگا کہ ہر کثیر رتبی میں اس کے متناظر ابہام سے علامت کی ایک تبدیلی کا اضافہ ہوگا۔ یہ تبدیلی پچھلی علامت کے ساتھ ہوگی یا جمع شدہ زائد علامت کے ساتھ۔ پس ایسی زائد وقوع صورت میں بھی جس میں ابتدائی کثیر رتبی میں علامت کی تکراروں سے حاصل کثیر رتبی میں علامت کی تکراریں باقی رہتی ہیں ایک تبدیلی جمع ہوتی ہے۔ پس ہم یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ کثیر رتبی کو ختم ہونے کے بعد سے ضرب دیا جائے تو کم از کم علامت کی ایک زائد تبدیلی داخل ہوتی ہے۔

اب فرض کرو کہ کثیر رتبی ایسے اجزائے ضربی کے حاصل ضرب سے بنا ہے جو منفی اور خیالی اصولوں کے جواب میں ہیں مثبت اصولوں، ج، جو وغیرہ کے متناظر اجزائے ضربی لا، ع، کلا، ب، لا، ج، وغیرہ میں سے ہر ایک سے اس کثیر رتبی کو ضرب دینے کا آخریہ ہوگا کہ ہر ایک جزو ضربی کے جواب میں علامت کی کم سے کم ایک تبدیلی داخل ہوگی۔ اس طرح جب تمام اصولوں کے جواب میں مکمل حاصل ضرب ملتا ہے تو ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ حاصل کثیر رتبی میں



علامت کی کم از کم اتنی تبدیلیاں موجود ہیں جتنی کہ اس کی مثبت اصلیں ہیں۔ یہی ڈیکارٹ کا مسئلہ ہے۔

۲۔ ڈیکارٹ کا قانون علامت۔ منفی اصلیں۔ منفی اصولوں کی صورت میں ڈیکارٹ کا قانون بیان کرنے سے پیشتر ہم ثابت کریں گے کہ اگر مساوات  $f(x) = 0$  میں  $x$  کی بجائے  $-x$  لاسندرج کیا جائے تو حاصل مساوات کی اصلیں وہی ہونگی جو ابتدائی مساوات کی ہیں سوائے اس کے کہ ان کی علامتیں بد جائیں گی۔ دفعہ ۱۶ کی مساوات متناظر

$f(x) = 0$  (۱- $x$ ) (۱- $x^2$ ) (۱- $x^3$ ) (۱- $x^4$ ) (۱- $x^5$ ) .. .. (۱- $x^n$ )

سے یہ نتیجہ مستنبط ہوتا ہے کہ چونکہ اس مساوات سے ہم اخذ کرتے ہیں

$f(-x) = 0$  (۱+ $x$ ) (۱+ $x^2$ ) (۱+ $x^3$ ) (۱+ $x^4$ ) (۱+ $x^5$ ) .. .. (۱+ $x^n$ )

اس سے ظاہر ہے کہ  $f(-x) = 0$  کی اصلیں ہیں

۱۔  $x$ ،  $-x$ ،  $x^2$ ،  $-x^2$ ،  $x^3$ ،  $-x^3$ ،  $x^4$ ،  $-x^4$ ،  $x^5$ ،  $-x^5$ ، .. ..  $x^n$ ،  $-x^n$ ۔  
پس  $f(x) = 0$  کی منفی اصلیں  $f(-x) = 0$  کی مثبت اصلیں ہونگی اور ہم منفی اصولوں کے لئے ڈیکارٹ کا قانون اس طرح بیان کر سکتے ہیں۔  
مساوات  $f(x) = 0$  کی منفی اصولوں کی تعداد کثیر وقتی  $f(-x) = 0$  کی قوتوں میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد سے زیادہ نہیں ہو سکتی۔

۲۱۔ خیالی اصولوں کے وجود کو ثابت کرنے میں ڈیکارٹ کے

## قانون کا استعمال

ڈیکارٹ کے قانون کے استعمال سے مساواتوں میں خیالی اصولوں کے وجود کا پتہ لگانا اکثر ممکن ہو گا۔ کیونکہ اگر کسی مساوات کی مثبت اصولوں کی بڑی

سے بڑی ممکن تعداد اور منفی اصولوں کی بڑی سے بڑی ممکن تعداد کا مجموعہ مساوات کے درجہ سے کم ہو تو خیالی اصلیں یقیناً موجود ہونگی۔ مثال کے طور پر مساوات

$$۱۰ + ۳ لا - ۴ = ۰$$

نو۔ اس مساوات میں چونکہ علامت کی صرف ایک تبدیلی ہے اس وجہ سے ایک سے زیادہ مثبت اصل نہیں ہو سکتی۔ اب لا کو - لا میں بدلنے سے حاصل ہوگا

$$۱۰ - ۳ لا - ۴ = ۰$$

اب چونکہ اس میں علامت کی صرف ایک تبدیلی ہے اس لئے منفی اصولوں کی تعداد ایک سے زیادہ نہیں ہو سکتی۔ اس طرح مجوزہ مساوات میں دو سے زیادہ حقیقی اصلیں موجود نہیں ہو سکتیں۔ اس لئے کم سے کم جب خیالی اصلیں موجود ہونی چاہئیں 31 - ڈیکارٹ کے قانون کا یہ استعمال صرف غیر مکمل مساواتوں کی صورت میں مفید ہے کیونکہ جب مساوات مکمل ہو تو یہ آسانی سے دیکھا جاسکتا ہے کہ ف (لا) اور ف (-لا) میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد کا مجموعہ مساوات کے درجہ کے بالکل مساوی ہوتا ہے۔ مسئلہ۔ اگر کثیر رتبی ف (لا) میں ناکی بجائے دو عدد ۱ اور ب مندرج کرنے سے نتیجہ مختلف علامت حاصل ہوں تو مساوات ف (لا) = ۰ کی حقیقی اصولوں کی طاق تعداد ان عددوں کے درمیان واقع ہوگی۔ لیکن اگر نتیجہ ہم علامت ہوں تو ان عددوں کے درمیان یا تو کوئی حقیقی اصل واقع نہیں ہوگی یا حقیقی اصولوں کی جنت تعداد واقع ہوگی۔

اس مسئلہ میں ان نتیجوں کی عام سے عام صورت شامل ہے جو کسی مساوات کے پہلے رکن کی علامتوں سے مساوات کی اصولوں کے متعلق اخذ کئے جاسکتے ہیں جبکہ لا کی بجائے دو دئے ہوئے عدد مندرج کئے جائیں، چنانچہ دفعہ ۱۲ کا مسئلہ اس کی ایک خاص صورت ہے۔ ہم اس مسئلہ کا پہلا حصہ ثابت کریں گے۔ دوسرے حصہ کو بالکل اسی طریقہ پر ثابت کیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ متبادر ۱ اور ب کے درمیان مساوات ف (لا) = ۰ کی اصلیں عم، عم، عم، ..... عدم واقع ہوتی ہیں اور ان کے علاوہ کوئی اور اصلیں واقع نہیں ہوتیں۔ فرض کرو کہ ۱ چھوٹا ہے ب سے

فرض کرو کہ جب 'ف' (لا) کو م اجزائے ضربی کے حاصل ضرب (لا - عم) (لا - عم) (لا - عم) سے تقسیم کیا جاتا ہے تو خارج قسمت 'فہ' (لا) حاصل ہوتا ہے۔ تو مساوات کماثلہ لیلی

$$f(\lambda) = (\lambda - \epsilon_1)(\lambda - \epsilon_2) \dots (\lambda - \epsilon_n)$$

اس میں یکے بعد دیگرے  $\lambda = \lambda$ ،  $\lambda = \lambda$ ،  $\lambda = \lambda$  رکھنے سے حاصل ہوگا

$$f(a) = (a - c_1)(a - c_2) \dots (a - c_n) \dots (a - c_m) \quad (1)$$

ف (ب) = (ب-ع<sub>۱</sub>) (ب-ع<sub>۲</sub>) .. .. (ب-ع<sub>n</sub>) نه (ب)

اب ذ ( د ) اور ذ ( ب ) ہم علامت ہیں، کیونکہ اگر ان کی علامتیں مختلف ہوتیں تو دفعہ ۱۲ کی رو سے ان کے درمیان مساوات ذ ( لا ) = کی کم سے کم ایک اصل ہوتی۔ بموجب فرض ذ ( د ) اور ذ ( ب ) کی علامتیں مختلف ہیں اس لئے حاصل ضربوں

$$(1 - \epsilon) \dots (1 - \epsilon)(1 - \epsilon)$$

(ب-ع) (ب-ع) " " (ب-ع)

32 کی علامتیں مختلف ہیں۔ لیکن دوسرے کی علامت مثبت ہے کیونکہ اس کے تمام اجزاء مثبت ہیں۔ پس پہلے کی علامت منفی ہے لیکن اس کے تمام اجزاء منفی ہیں۔ اس لئے ان کی تعداد صاف ہونی چاہیے جس سے مسئلہ ثابت ہے۔

اس مسئلہ میں یہ یاد رہے کہ منفی اصولوں کو اتنی مرتبہ شمار کیا گیا ہے جتنی مرتبہ دو تکرار یا تہی ہیں۔

اس دفعہ کے مسئلہ پر ترمیمی طریقہ کا استعمال کرنا فائدہ بخش ہو گا۔ اس نقطہ نظر سے اس مسئلہ کی صداقت خود واضح ہو جاتا ہے کہ نہ یہ ظاہر ہے کہ جب کسی دو نقطوں کو ایک منحنی سے ملایا جاتا ہے تو ان نقطوں کے درمیان منحنی کا حصہ محور لا کو طاق مرتبہ قطع کرتا ہے جبکہ نقطہ محور کی مخالف سمتوں میں ہوں اور جنت مرتبہ قطع کرتا ہے۔

یا بالکل قطع نہیں کرتا جبکہ نقطہ محور کی ایک ہی جانب واقع ہوں۔

## مثالیں

- ۱۔ اگر ایک مساوات کی سب توہنجی علامتیں مثبت ہوں تو کوئی مثبت اہل نہیں ہو سکتی۔
- ۲۔ اگر کسی کھل مساوات کی رقموں کی علامتیں یکے بعد دیگرے مثبت اور منفی ہوں تو کوئی اصل منفی نہیں ہو سکتی۔
- ۳۔ اگر ایک مساوات کی پہلی چند رقموں کی علامتیں مثبت ہوں اور ان کے بعد آنے والی رقموں کی علامتیں منفی تو صرف ایک اصل مثبت ہوگی اور اس سے زیادہ نہیں۔  
دفعہ ۱۲ استعمال کرو اور صفر اور  $\infty$  کا اندراج کرو۔ دفعہ ۱۹ بھی استعمال کرو۔
- ۴۔ اگر ایک مساوات میں لاکی صرف جفت قوتیں واقع ہوں اور سب سر مثبت ہوں تو کوئی حقیقی اصل نہیں ہو سکتی۔

دفعات ۱۹ اور ۲۰ کا استعمال کرو۔

- ۵۔ اگر ایک مساوات میں لاکی صرف طاق قوتیں واقع ہوں اور سب سر مثبت ہوں تو صرف اصل کے سوا کوئی حقیقی اصل نہ ہوگی۔

- ۶۔ اگر ایک مساوات میں ہو تو ف (لا) میں علامت کی تکراروں کی تعداد ف (-) لا) میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد کے مساوی ہوگی۔

- ۷۔ اگر ایک کھل مساوات کی تمام اصلیں حقیقی ہوں تو مثبت اصولوں کی تعداد علامت کی تبدیلیوں کی تعداد کے مساوی ہوگی اور منفی اصولوں کی تعداد علامت کی تکراروں کی تعداد کے مساوی۔

- ۸۔ اگر ایک مساوات میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد جفت ہو تو اس کی آخری رقم کی علامت مثبت ہوئی چاہے اور اگر تبدیلیوں کی تعداد طاق ہو تو اس کی آخری رقم منفی ہوئی چاہے۔  
لاکی بڑی سے بڑی قوت والی رقم کا سر مثبت ہو (دیکھو دفعہ ۱)۔

- ۹۔ مثال ۸ سے ثابت کرو کہ اگر ایک مساوات میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد جفت ہو تو جفت اصولوں کی تعداد اس جفت عدد کے مساوی ہوگی یا اس سے چھوٹے جفت عدد کے مساوی۔ اور اگر تبدیلیوں کی تعداد طاق ہو تو مثبت اصولوں کی تعداد اس طاق عدد کے مساوی ہوگی یا اس سے چھوٹے طاق عدد کے مساوی۔ دوسرے الفاظ میں مثبت



کی صرف دو حقیقی اصلیں ۱ اور -۱ ہیں اور ان کے علاوہ اور کوئی حقیقی اصل نہیں ہے اور اگر ن طاق ہو تو اس مساوات کی صرف ایک حقیقی اصل -۱ ہے اور کوئی دوسری حقیقی اصل نہیں ہے یہ اور سوال ۱۶ دفعات ۱۹ اور ۲۰ سے اخذ ہو سکے ہیں۔

۱۶۔ ثابت کرو کہ اگر ن جفت ہو تو مساوات

$$x^n + 1 = 0$$

کی کوئی حقیقی اصل نہیں ہے اور اگر ن طاق ہو تو صرف ایک حقیقی اصل -۱ ہے اور کوئی دوسری حقیقی اصل نہیں ہے۔

۱۷۔ مساوات

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 = 0$$

کو حل کرو۔

یہ مساوات شکل

$$(x^2 + 2x + 3)(x^2 + 4x + 5) = 0$$

میں لکھی جاسکتی ہے۔

$$\text{جواب :- } x = -1, -2, -3, -4$$

جذروں کی علامتوں سے چار اجتماع حال ہوتے ہیں اور جملہ بالا میں چار اصلیں شامل ہیں۔

۱۸۔ وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں جملہ

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 = 0$$

کی چار مختلف قیمتیں ہوں جہاں  $x^2 = -1$

اگر ط کے اذخاں سے کوئی قیہ غائدہ کیجاتی تو اس جملہ کی قیمتیں ہوتیں یہاں  $x^2$  کو دوسرے جذر کے اندر اور اس کے باہر دونوں جگہ ایک ہی علامت ساتھ لینا چاہیئے۔ اس لئے کل چار قیمتیں ملتی ہیں۔

$$\text{جواب :- } x = -1, -2, -3, -4$$

۱۹۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں جملہ

$$- 9 + ط = ۳ + ۱۳ + ط - ۳۴ - ۲ ط + ۱۳$$

کی چار قیمتیں ہوں جہاں  $ط = ۱ = -۱$

$$جواب :- ۱۳ + ۳۶ - ۲۰۰ - ۲۰۰ - ۳۱۶۸ + ۱۱۳۴۴ = ۰$$

۲۔ — منطق سروں والی ایک مساوات بناؤ جسکی اصلیں جملہ

$$ط، راپ، ط + راق، ط + مار$$

کی تمام قیمتیں ہوں جہاں

$$ط = ۱، ط = ۱، ط = ۱$$

اس جملہ کی کل ۸ مختلف قیمتیں ہیں یعنی

$$راپ + راق + مار، راپ - راق - مار$$

$$راپ - راق - مار، راپ + راق + مار$$

$$راپ + راق - مار، راپ - راق + مار$$

$$راپ - راق + مار، راپ + راق - مار$$

فرض کر دو کہ

$$۱ = ط + راپ + ط + راق + ط + مار$$

مربع لینے سے

$$۱ = ط + ر + ق + ۲ (ط + راق + ط + مارپ + ط + مارپ + ق)$$

اور تمام کو منتقل کرنے اور پھر مربع لینے سے

$$(۱ - ط - ر - ق) = ۲ (ط + ر + رپ + پ ق)$$

$$+ ۸ ط ط ط راپ ر (ط راپ + ط راق + ط مار)$$

اور تمام کو منتقل کرنے، طم ہا پ + طم ہا ق + طم ہا ر کی بجائے لا درج کرنے اور مرتبہ لینے سے بالآخر ہمیں مساوات ملتی ہے

$$\{ \text{لا}^2 - 2 \text{لا} (\text{پ} + \text{ق} + \text{ر}) + \text{پ}^2 + \text{ق}^2 + \text{ر}^2 - 2 \text{پ} \text{ق} - 2 \text{پ} \text{ر} - 2 \text{ق} \text{ر} \}$$

$$= 4 \text{پ} \text{ق} \text{ر} \text{لا}$$

جو جذر کی علامتوں سے آزاد ہے۔

یہ آٹھ درجی مساوات ہے جس کی اصلیں وہ ہیں جو اوپر لکھی گئی ہیں۔

چونکہ طم، طم، طم، غائب ہو چکے ہیں اس لئے ۸ اصلوں ± را پ

± را ق ± را ر میں سے کسی کو لا کے مساوی فرض کیا جاسکتا ہے۔ محصلہ مساوات اس طرح بھی حاصل ہو سکتی تھی کہ لائیں سے ہر اصل کو تفریق کیا جائے اور پھر ان کو مسلسل ضرب دیا جائے جس طرح وفد ۱۶ کی مثال ۶ میں کیا گیا تھا۔







کے سروں کو مساوی رکھنے سے مساواتوں کا حسب ذیل سلسلہ ملے گا

$$\left. \begin{aligned} \text{ب} &= - (ع_1 + ع_2 + \dots + ع_n + ع_{n+1}) \\ \text{ب} &= (ع_1 + ع_2 + \dots + ع_n + ع_{n+1}) \\ \text{ب} &= - (ع_1 + ع_2 + \dots + ع_n + ع_{n+1}) \\ &\dots \dots \dots \\ \text{ب} &= (1-n) (ع_1 + ع_2 + \dots + ع_n + ع_{n+1}) \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

ان کی مدد سے ہم اصولوں اور سروں کے درمیان جو روابط ہیں ان کو حسب ذیل 36 طریقہ پر بیان کر سکتے ہیں۔

مسئلہ — ہر جبری مساوات میں جس کی بڑی سے بڑی قوت والی رقم کا سر ایک ہو دوسری رقم کا سر ب تبدیل علامت اس کی اصولوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

تیسری رقم کا سر ب، اصولوں میں سے دو دو کے حاصل ضربوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

چوتھی رقم کا سر ب، تبدیل علامت اصولوں میں سے تین تین کے حاصل ضربوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔ علیٰ القیاس۔ سروں کی علامتیں باری باری سے منفی اور مثبت لگاتی ہیں اور باہم ضرب کھانے والی اصولوں کی تعداد اصولوں کے تناظر تقابل کی ہر رقم میں بقدر ایک کے بڑھتی رہے یہاں تک کہ ہم اس تقابل پہنچیں جو ان اصولوں کا حاصل ضرب ہے۔

اگر لان کا سر ب ایک نہ ہو (دیکھو وندا) تو مساوات کی ہر رقم کو اس سے

تقسیم کرنا چاہیے۔ اس صورت میں اصولوں کا مجموعہ  $\frac{1}{b}$  کے مساوی ہوگا اور ان میں سے دو دو کے حاصل ضربوں کا مجموعہ  $\frac{1}{b^2}$  کے مساوی ہوگا اور علیٰ القیاس۔

نتیجہ صریح (۱) مساوات کی ہر اصل اس کی مطلق رقم کا ایک مقسوم علیہ ہوتی ہے۔

نتیجہ صریح (۲) اگر مساوات کی سب اصلیں مثبت ہوں تو سر مشمول لا کی بڑی سے بڑی قوت والی رقم کے سر کے (باری باری سے مثبت اور منفی ہونگے۔ اور اگر سب اصلیں منفی ہوں تو سب سر مثبت ہونگے۔ یہ بات مساواتوں (۲) سے ظاہر ہے۔

(دیکھو دفعات ۱۹ اور ۲۰)

۲۴۔ مسئلہ بالا کے اطلاق سے دفعہ مابقی کی مساواتوں (۲) سے چونکہ سرور اور ن اصلوں کے درمیان جدا جدا ن ربط ملتے ہیں اس لئے ممکن ہے یہ خیال پیدا ہو کہ مساوات کا عام حل دریافت کرنے میں اس سے کوئی فائدہ ہوگا۔ درحقیقت یہ بات نہیں ہے کیونکہ فرض کرو کہ ان مساواتوں کی مدد سے ہم ابتدائی مساوات کی ایک اصل عم حاصل کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔ یہ اس وقت ممکن ہے جبکہ دی ہوئی مساواتوں کی مدد سے دوسری اصلوں کو سا قط کیا جائے اور بالآخر وہ مساوات حاصل کی جائے جس کی ایک اصل عم ہے۔

اب خواہ کسی طریقہ سے یہ آخری مساوات حاصل ہو اس میں اصل عم کے

37

علاوہ دوسری اصلیں عم عم ... .. عن بھی موجود ہونگی اور عم کے دریافت کرنے

میں ان کو بھی دریافت کرنا پڑے گا۔ کیونکہ مساواتوں (۲) میں سب کی سب اصلیں ایک ہی طریقہ سے داخل ہوتی ہیں اور اس لئے اگر باقی دوسری اصلوں کو سا قط کر کے عم کا معلوم کرنا مقصود ہو (یا کسی دوسری اصل کا) تو ہم ایسی مساوات پر پہنچیں گے جو عم کے لئے حاصل شدہ مساوات سے صرف اس قدر فرق رکھیں گی کہ اصل عم کے بجائے اصل عم (یا وہ دوسری اصل) موجود ہوگی۔ اس لئے عمل اسقاط سے

ہمیں ایسی مساوات ملیگی جس کی ن اصلیں عم عم ... .. عن ہونی چاہئیں

اور اس لئے ایسی مساوات کا حل کرنا اتنا ہی مشکل ہے جتنا کہ دی ہوئی مساوات کا۔ یہ آخری مساوات فی الحقیقت ابتدائی مساوات ہے جس میں مطلوبہ اصل لا کی

بجائے واقع ہوتی ہے۔ چنانچہ ہم کبھی مساوات کی صورت لیکر اس بات کو ثابت کرینگے۔ طریق عمل بالکل عام ہوگا اور اس لئے کسی درجہ کی مساوات پر جاری کیا جاسکتا ہے۔  
فرض کرو کہ مساوات

$$لا + ب + لا + ب + لا + ب = ۰$$

کی اسیلیں عہ، ب، جہ ہیں۔

دفعہ ۲۳ سے ہمیں حاصل ہوگا

$$ب = - (عہ + ب + جہ)$$

$$ب = عہ + ب + جہ + جہ$$

$$ب = عہ + جہ$$

ان میں سے پہلی مساوات کو عہ سے اور دوسری کو عہ سے ضرب دو اور تینوں کو جمع کرو تو

$$ب + عہ + ب + عہ + ب = - عہ$$

$$عہ + ب + عہ + ب + ب = ۰$$

یا

جو دی ہوئی کبھی مساوات ہے جس میں لا کی بجائے عہ ہے۔

طالب علم مشق کے طور پر اسی نتیجہ کو ثابت کرنے کے لئے درجہ چہارم

کی مساوات لے سکتا ہے۔ عام صورت میں صرف یہ کرنا ہوگا کہ دفعہ ۲۳ کی

مساواتوں کو علی الترتیب عہ، عہ، عہ، عہ، عہ، عہ سے ضرب دیکر انکو جمع کیا جائے۔

اگرچہ مساواتوں (۲) سے مساوات کا عام حل دریافت کرنے میں کوئی

مدد نہیں ملتی لیکن اکثر عددی مساواتوں کا حل معلوم کرتے وقت ان سے بہولت

پیدا ہوتی ہے جبکہ اصولوں کے درمیان کوئی خاص ربط دئے گئے ہوں۔

ان کو وہ رشتے معلوم کرنے میں بھی استعمال کیا جاسکتا ہے جو سروں کے درمیان

ہونے چاہئیں جبکہ اصولوں کے درمیان رشتے دئے گئے ہوں۔

## مثالیں

۱ — مساوات

$$۵ - ۵ - ۱۶ - ۱۶ - ۸۰ - ۸۰ = ۰$$

کو حل کر دو جبکہ اس کی دو اصلوں کا مجموعہ صفر ہو۔

فرض کر دو کہ اصلیں  $۵$ ،  $۱۶$ ،  $۸۰$  ہیں تو

$$۵ = ۵ + ۰$$

$$۱۶ = ۱۶ + ۰$$

$$۸۰ = ۸۰ + ۰$$

یہ  $۵$ ،  $۱۶$ ،  $۸۰$  لینے سے ان میں سے پہلی مساوات سے حاصل ہوگا  $۵ = ۵$

اور پھر دوسری یا تیسری مساوات سے حاصل ہوگا  $۱۶ = ۱۶$ ۔ اس طرح یہ اور جب کی قیمتیں حاصل ہونگی  $۸۰$  اور  $۸۰$ ۔ اس لئے مطلوبہ اصلیں  $۵$ ،  $۱۶$ ،  $۸۰$  ہیں۔

۲ — مساوات

$$۳ - ۳ - ۴ - ۴ = ۰$$

کو جس کی دو اصلیں مساوی ہیں حل کر دو۔

فرض کر دو کہ اس کی تین اصلیں  $۳$ ،  $۴$ ،  $۴$  ہیں تو

$$۳ = ۳ + ۰$$

$$۴ = ۴ + ۰$$

جن سے  $۳ = ۳$ ،  $۴ = ۴$ ۔ حاصل ہوگا۔ اس لئے مطلوبہ اصلیں  $۳$ ،  $۴$ ،  $۴$  ہیں۔

۳ — مساوات

$$۱۲ - ۱۲ - ۲ - ۲ - ۹ - ۹ = ۰$$

میں مساوی اصلوں کے دو زوج ہیں۔ انہیں معلوم کر دو۔

فرض کر دو کہ اصلیں  $۱۲$ ،  $۲$ ،  $۹$  ہیں تو

$$۱۲ = ۱۲ + ۰$$

$$۲ = ۲ + ۰$$

$$۹ = ۹ + ۰$$

ان سے  $x$  اور  $y$  کی قیمتیں ۱ اور ۳ حاصل ہونگی۔

۴۔ مساوات

$$۹x + ۱۱y + ۲۳ = ۰$$

کو جس کی دو اصلیں ۳ اور ۲ کی نسبت رکھتی ہیں حل کرو۔

فرض کرو کہ اصلیں  $x = ۲$  اور  $y = ۳$  یہ توقع کے استقامت سے نہیں  
بہ آسانی حاصل ہوگا

$$۱۸ = ۲ + ۳ = ۵$$

$$۲۸ = ۲ + ۵ = ۳$$

(89)

ان مساواتوں سے ہمیں یہ میں مساوات درجہ دوم حاصل ہوگی

$$۱۹x + ۹۰y + ۵۶ = ۰$$

اس کی اصلیں ۴ اور  $\frac{۱۳}{۱۹}$  ہیں۔ پہلی اصل سے  $x$  اور  $y$  کی قیمتیں ۶ اور ۱

حاصل ہونگی۔ اس لئے مطلوبہ اصلیں  $x = ۶$ ،  $y = ۱$  ہیں۔

طالب علم یہاں پوچھیں کہ یہ کی قیمت  $\frac{۱۳}{۱۹}$  کا کیا مطلب ہے۔ گذشتہ  
مثالوں میں بھی یہ وقت پیش آئی ہوگی۔ لیکن یہ معلوم رہے کہ اس نوعیت کی مثالوں  
میں مطلوبہ نامعلوم مقداروں کو معلوم کرنے کے لئے ہمیں اصلوں اور سروں کے درمیان  
تمام روابط کو استعمال کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ دی ہوئی  
شرط سے اصلوں کے درمیان ایک یا زیادہ ربط قائم ہو جاتے ہیں۔ جب کبھی یہ  
صورت پیدا ہو کہ اثنائے عمل میں استعمال ہونے والی مساواتوں سے اصلوں کے لئے  
قیمتوں کے ایک نظام سے زیادہ نظام حاصل ہوں تو اصلی اصلیں اس شرط کی مدد  
معلوم ہو سکتی ہیں کہ... اس مساوات (یا ان مساواتوں) کو پورا کرتی ہیں جو اصلوں  
اور سروں کے درمیان ہیں اور جن کا استعمال ان اصلوں کو معلوم کرتے وقت نہیں  
کیا گیا ہے۔ مثلاً موجودہ مثال میں قیمت  $y = ۳$  سے قیمتوں کا ایسا نظام ملتا ہے جو  
متروکہ مساوات

$$۲۲ = ۲ + ۳ = ۵$$

کو پورا کرتا ہے۔ قیمت  $y = \frac{۱۳}{۱۹}$  سے قیمتوں کا ایسا نظام ملتا ہے جو اس مساوات کو

پورا نہیں کرتا اور اسلئے مسترد کر دیا گیا ہے۔

۵ — مساوات

$$۰ = ۱۵ - ۲۳ + ۹ - ۱۰$$

کو جس کی اصلیں سلسلہ حسابیہ میں ہیں حل کرو۔

فرض کرو کہ اصلیں عہ - ضہ، عہ، عہ + ضہ ہیں تو

$$۳ = عہ - ۹$$

$$۳ = عہ - ضہ = ۲۳$$

جن سے ہمیں تین اصلیں ۱، ۳، ۵ حاصل ہوں گی۔

۶ — مساوات

$$۰ = ۴۰ - ۲۲ + ۲ - ۱۰$$

کو جسکی اصلیں سلسلہ حسابیہ میں ہیں حل کرو۔

یہاں فرض کرو کہ اصلیں عہ - ۳ ضہ، عہ، عہ + ضہ، عہ + ۲ ضہ ہیں۔

جواب :- ۵، ۲، ۱

۷ — مساوات

$$۰ = ۸ - ۲۸ + ۲۲ - ۱۰$$

کو جسکی اصلیں سلسلہ ہندیہ میں ہیں حل کرو۔

یہاں فرض کرو کہ اصلیں عہ، عہ، عہ، عہ ہیں۔ دفعہ ۲۳ کی مساواتوں (۲) میں

تیسری مساوات سے ہمیں عہ = ۳ یا عہ = ۲ حاصل ہوگا اور پھر پہلی یا دوسری

مساوات سے ہمیں درجہ دوم کی مساوات حاصل ہوگی۔

جواب :- ۲، ۲، ۲، ۲

۸ — مساوات (40)

$$۰ = ۲۴ - ۱۲ + ۱۰ - ۱۰$$

کو جسکی اصلیں سلسلہ ہندیہ میں ہیں حل کرو۔

یہاں فرض کرو کہ اصلیں عہ، عہ، عہ، عہ ہیں۔ دفعہ ۲۳ کی مساواتوں

(۲) میں سے دوسری اور چوتھی مساوات استعمال کرو۔





جواب:  $\sqrt{3} - \sqrt{2} \pm 1, \sqrt{2} - \sqrt{3}$

۱۷ — مساوات

$$= 12 + 15 - 15 + 15 - 13$$

کی دو اصولوں کا حاصل ضرب ۲ ہے۔ سب اصلیں معلوم کرو۔

جواب: ۱،  $\frac{1}{3}$ ،  $1 \pm i$

۱۵۔ کعبی مساوات

$$\text{لا}^2 - \text{ف}^2 = \text{لا}^2 + \text{ق}^2 - \text{لا}^2 - \text{ر}^2 =$$

کی ایک اصل دوسری کا دو چند ہے۔ ثابت کرو کہ پہلی اصل کو ایک مساوات درجہ دوم سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔

(41) ۱۶ — ثابت کرو کہ مساوات

$$a^0 + a^1 + a^2 + \dots + a^{n-1} + a^n$$

کی سب اعلیں معلوم ہو سکتی ہیں اگر وہ سلسلہ حسابیہ میں ہوں۔

فرض کرو کہ اعلیٰ عہدہ + مذہبۂ عامہ + مذہبۂ خاصہ + ... عہدہ + (ن-۱) ضمیمہ  
میں تو مساواتوں (۲) میں سے پہلی مساوات سے حاصل ہوگا

$$- \text{ب} = n + \{1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)\} \text{ ضمه}$$

$$= n \text{ عدد} + \frac{n(n-1)}{2} \text{ ضمه} \dots \dots \dots (1)$$

پھر چونکہ مقداروں کی کسی تعداد کے مربعوں کا مجموعہ = ان مقداروں کے مجموعہ کا مربع بنتی ہے ان میں سے دو دو کے حاصل ضربوں کے مجموعہ کا دو چندان ملے گا۔

$$b_1^2 - b_2^2 = b_1^2 + (a_1 + a_2) + (a_1^2 + a_2^2) + \dots + (a_1 + a_2) + a_2^2 =$$

$$= n \text{ عه}^2 + n(1-n) \text{ عه ضه} + \frac{n(n-1)(1-n)^2}{2} \text{ ضه}^2$$

(۱) کے مروجہ کو (۲) کے نکلنے میں سے تفریق کر دو تہ ۲، ۱ اور ۱ کی قوت میں

لمبا نیگا۔ پھر ہم مساوات (۱) سے  $\epsilon$  معلوم کر سکتے ہیں۔ اسی طرح تمام اصولوں کو سروں  
بم اور بم کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے۔

۱۷۔ وہ شرط معلوم کرو جو مساوات

$$\text{لا}^2 - \text{ف لا} + \text{ق لا} - \text{ر} = 0$$

کے سروں سے پوری ہونی چاہیے اگر اس کی دو اصلوں  $\epsilon$  بہ میں ربط  $\epsilon + \text{بہ} = 0$  موجود ہو  
جواب :-  $\text{ف ق} - \text{ر} = 0$

۱۸۔ وہ شرط معلوم کرو کہ کبھی مساوات

$$\text{لا}^2 - \text{ف لا} + \text{ق لا} - \text{ر} = 0$$

کی اصلیں سلسلہ ہندسیہ میں ہوں۔

$$\text{جواب :-} \text{ف}^2 - \text{ر} - \text{ق}^2 = 0$$

۱۹۔ وہ شرط معلوم کرو کہ مساوات بالا کی اصلیں سلسلہ موسیقیہ میں ہوں۔

$$\text{جواب :-} ۲۷ - ۹ \text{ف ق} + ۲ \text{ق}^2 = 0 \quad (\text{دیکھو مثال ۱۲})$$

۲۰۔ وہ شرط معلوم کرو کہ مساوات

$$\text{لا}^3 + \text{ف لا}^2 + \text{ق لا} + \text{ر لا} + \text{س} = 0$$

کی دو اصلوں میں ربط  $\epsilon + \text{بہ} = 0$  موجود ہو اور اس صورت میں درجہ دوم کی  
دو مساواتیں معلوم کرو جنکی اصلیں (۱)  $\epsilon + \text{بہ} = 0$  اور (۲)  $\text{جہ} + \text{ضہ} = 0$  ہوں۔

$$\text{جواب :-} \text{ف ق} - \text{ر} - \text{ق}^2 = 0$$

$$(۱) \text{ف لا} + \text{ر} = 0$$

$$(۲) \text{لا}^2 + \text{ف لا} + \frac{\text{ف س}}{\text{ر}} = 0$$

۲۱۔ وہ شرط معلوم کرو کہ مساوات بالا کی اصلوں میں ربط  $\text{بہ} + \text{جہ} = \epsilon + \text{ضہ}$

موجود ہو۔

$$\text{جواب :-} \text{ف}^2 - ۲ \text{ف ق} + ۸ \text{ر} = 0$$

۲۲۔ وہ شرط معلوم کرو کہ مساوات

$$\text{لا}^3 + \text{ف لا}^2 + \text{ق لا} + \text{ر لا} + \text{س} = 0$$

کی اصلوں عہ، ب، ج، د، ح میں ربط عہ ب = جہ ضہ موجود ہو۔

جواب :- ف<sup>۱</sup>س - ر<sup>۱</sup> = ۔

۲۳۔ ثابت کرو کہ سوال ۲۲ میں حاصل شدہ شرط اس وقت بھی پوری ہوتی ہے جبکہ درجہ چہارم کی مساوات کی اصلیں سلسلہ ہندیہ میں ہوں۔

۲۵۔ مساوات کے درجہ کا تنزل جبکہ اسکی دو اصلوں میں کوئی ربط موجود ہو۔ (42)

ہم نے دفعہ مابقی کی مثالوں میں یہ دیکھا ہے کہ اصلوں کے درمیان کوئی خاص روابط موجود ہوں تو ان کو متعین کرنے میں سروں اور اصلوں کو ملائی مساواتوں کا کیا فائدہ ہے۔ اب ہم عام صورت میں یہ ثابت کریں گے کہ اگر مساوات ف (لا) = کی اصلوں میں سے دو کے درمیان یہ = فہ (عہ) کی شکل کا ربط موجود ہو تو مساوات کا درجہ بقدر ۲ کے گھٹایا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ مساوات متماثلہ

$$ف (لا) = ل<sup>۱</sup>لا + ل<sup>۲</sup>لا + ل<sup>۳</sup>لا + \dots + ل<sup>n</sup>لا$$

میں لا کی بجائے فہ (لا) مندرج کیا گیا ہے تو

$$ف (فہ (لا)) = ل<sup>۱</sup>فہ (لا) + ل<sup>۲</sup>فہ (لا) + \dots + ل<sup>n</sup>فہ (لا)$$

اس مساوات متماثلہ کے دوسرے رکن کو ہم سہولت کی خاطر فا (لا) سے تعبیر کرتے ہیں۔ اب لا کی بجائے عہ مندرج کرنے سے

$$فا (عہ) = ف (فہ (عہ)) = ف (بہ) = ۔$$

پس مساوات فا (لا) = کو عہ پورا کرتا ہے اور یہ ف (لا) = کو بھی

پورا کرتا ہے۔ اس لئے کثیرالارتقام ف (لا) اور فا (لا) کا جزو مشترک لا۔ عہ  
اس طرح عہ معلوم ہو سکتا ہے اور اس سے فہ (عہ) یا یہ معلوم ہو جاتا ہے  
اور اس لئے دی ہوئی مساوات کے درجہ کو بقدر ۲ کے گھٹایا جاسکتا ہے۔

## مثالیں

۱ — مساوات

$$لا^۲ - لا^۵ - لا^۲ + لا^۲ = ۰$$

کی دو اصلوں میں فرق = ۳۔ انہیں معلوم کرو۔  
یہاں یہ - عہ = ۳، پ = ۳ + عہ۔ دئے ہوئے کثیرالارتقام ف (لا) میں  
لا کی بجائے لا + ۳ مندرج کرو تو یہ کثیرالارتقام لا^۲ + لا^۲ - لا^۵ - لا^۱۰ ہو جائیگا۔ اس کا  
اور ف (لا) کا جزو مشترک لا۔ ۲ ہے جس سے عہ = ۲، پ = ۵ حاصل ہوگا۔  
تیسری اصل - ۲ ہے۔

۲ — مساوات

$$لا^۵ - لا^۱۱ + لا^۱۳ - لا^۶ = ۰$$

کی دو اصلوں میں ربط ۲ + پ = ۳ + عہ = ۷ موجود ہے۔ اسکی سب اصلیں معلوم کرو۔  
جواب :- ۱، ۲، ۱، ۲، ۱، ۲

یہاں یہ بات واضح رہے کہ جب دو کثیرالارتقام ف (لا) اور فا (لا) میں  
مشترک اجزائے ضربی ہوں تو یہ اجزائے ضربی مقسوم علیہ اعظم دریافت کرنے کے  
معمولی طریقہ سے حاصل ہو سکتے ہیں۔ مثلاً اگر ہمیں یہ معلوم ہو کہ دو دی ہوئی  
مساواتوں میں مشترک اصلیں موجود ہیں تو دے ہوئے کثیرالارتقام مقسوم علیہ اعظم  
کو صفر کے مساوی رکھنے سے ہم ان اصلوں کو معلوم کر سکتے ہیں۔

## مثالیں

۱ — مساواتوں

$$۲ \text{ لا} + ۵ \text{ لا} - ۶ \text{ لا} - ۹ = ۰$$

$$۳ \text{ لا} + ۷ \text{ لا} - ۱۱ \text{ لا} - ۱۵ = ۰$$

میں دو اصلیں مشترک ہیں۔ انکو معلوم کرو۔

جواب :- ۱ - ۲

۲ — مساواتوں

$$\text{لا} + \text{ف} \text{ لا} + \text{ق} \text{ لا} + \text{ر} = ۰$$

$$\text{لا} + \text{ف} \text{ لا} + \text{ق} \text{ لا} + \text{ر} = ۰$$

میں دو اصلیں مشترک ہیں۔ وہ دو درجی مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں یہ اصلیں ہوں۔ ہر مساوات کی تیسری اصل بھی دریافت کرو۔

$$\text{جواب :- لا} + \frac{\text{ق} - \text{ق}}{\text{ف} - \text{ف}} \text{ لا} + \frac{\text{ر} - \text{ر}}{\text{ف} - \text{ف}} = ۰$$

$$\frac{\text{ر} - \text{ر}}{\text{ف} - \text{ف}}$$

۲۶ — اکائی کے جذر الکعب -

$$\text{لا} - ۱ = ۱، \text{ لا} + ۱ = ۰$$

کی شکل کی مساواتوں کو جنہیں صرف بڑی سے بڑی قوت والی رقم اور مطلق رقم شامل ہوں ہم ثنائی مساواتیں کہیں گے۔ قبل الذکر مساوات کی اصلوں کو ہم

اکائی کے ن ویں جذر کہیں گے۔ اگلے باب میں ان شکلوں پر بحث کی جائیگی۔ فی الحال ہم ثنائی کبھی مساوات کی سادہ صورت پر اکتفا کرتے ہیں جس کے لئے اصلوں کی بعض سودمند خواص بہ آسانی ثابت کئے جاسکتے ہیں۔ دفعہ ۱۲ مثال ۵ میں ہم نے ثابت کیا ہے کہ کبھی مساوات

$$\text{لا} - ۱ = ۰$$

کی اصلیں حسب ذیل ہیں

ان خیالی اصلوں میں سے کسی ایک کو اگر ہم  $\text{سہ}$  سے تعبیر کریں تو دوسری خیالی اصل  $\text{سہ}^2$  ہو جائیگی۔ مرجع لینے سے یہ بات ظاہر ہے یا اس کو ہم اس طرح بھی ثابت کر سکتے ہیں:-

اگر کبھی کسی ایک اصل  $\text{سہ}$  ہو تو  $\text{سہ}^2$  بھی ایک اصل ہونی چاہئے کیونکہ  $\text{سہ}^3 = 1$  اس لئے مرجع لینے سے  $\text{سہ}^2 = 1$  یعنی  $(\text{سہ}^2)^3 = 1$  اس طرح  $\text{سہ}^2$  بھی کبھی مساوات لا۔  $1 = \text{سہ}^2$  کو پورا کرتا ہے اور اسلئے اسکی ایک اصل  $\text{سہ}^2$  بھی ہے۔ اب ہمیں مساوات متماثلہ ملیں

$$\text{لا} - 1 = 1 (\text{لا} - 1) (\text{سہ} - 1) (\text{لا} - \text{سہ})$$

لا کو - لائیں تبدیل کرنے سے مساوات متماثلہ

$$\text{لا} + 1 = 1 (\text{لا} + 1) (\text{لا} + \text{سہ}) (\text{لا} + \text{سہ}^2)$$

حاصل ہوگی جس سے

$$\text{لا} + 1 = 0$$

کی اصلیں معلوم ہونگی۔

جہاں کہیں مقداروں کے کسی حاصل ضرب میں اکائی کے جذرا لکعب داخل ہوں اور انکی قوتیں ۲ سے زیادہ پیش ہوں تو ہم انکی بجائے  $\text{سہ}^2$  یا  $\text{سہ}^4$  یا ایک رکھ سکتے ہیں مثلاً

$$\text{سہ}^2 = \text{سہ}^3 \times \text{سہ} = \text{سہ}^4 = \text{سہ}^5 = \text{سہ}^6 \times \text{سہ}^2 = \text{سہ}^8$$

$$\text{سہ}^6 = \text{سہ}^2 \times \text{سہ}^4 = \text{سہ}^8 \text{ وغیرہ}$$

دفعہ ۲۳ کی مساواتوں (۲) میں سے پہلی یا دوسری مساوات سے

اکائی کے جذرا لکعبوں کی حسب ذیل خاصیت ملتی ہے

$$1 + \text{سہ} + \text{سہ}^2 = 0$$

اس مساوات کی مدد سے کسی جملہ کو جس میں حقیقی مقادیر اور خیالی

جذرا لکعب داخل ہوں ہم  $f + \text{سہ}^2 q + \text{سہ}^4 r + \text{سہ}^6 s + \text{سہ}^8 t$

میں سے کسی ایک شکل میں لکھ سکتے ہیں۔

## مثالیں

۱ — ثابت کرو کہ حاصل ضرب

$$(س م + س ن) (س م + س ن)$$

منطق ہے۔

جواب :- م<sup>۲</sup> - م ن + ن<sup>۲</sup>

۲ — حسب ذیل متماثلہ مساواتوں کو ثابت کرو۔

$$م + ن = م + ن \quad (س م + س ن) (س م + س ن)$$

$$م - ن = م - ن \quad (س م - س ن) (س م - س ن)$$

۳ — ثابت کرو کہ حاصل ضرب

$$(ع + س ی + س ج) (ع + س ی + س ج)$$

منطق ہے۔

جواب :- ع<sup>۲</sup> + ی<sup>۲</sup> + ج<sup>۲</sup> - ع ی - ع ج - ع ی

۴ — متماثلہ مساوات

$$(ع + ی + ج) (ع + س ی + س ج) (ع + س ی + س ج)$$

$$\equiv ع + ی + ج + ع ی + ع ج + ع ی$$

کو ثابت کرو۔

۵ — متماثلہ مساوات

$$(ع + س ی + س ج) + (ع + س ی + س ج) + (ع + س ی + س ج)$$

$$\equiv (ع + ی + ج) + (ع + ی + ج) + (ع + ی + ج)$$

سوال (۲) استعمال کرو۔

کو ثابت کرو۔

۶ — متماثلہ مساوات

$$(ع + س ی + س ج) - (ع + س ی + س ج)$$

$$\equiv ع - ی - ج - ع + ی + ج$$

سوال (۲) استعمال کرو اور سہ - سہ کی بجائے اسکی قیمت

کو ثابت کرو۔

۷۔ ۳ درج کرو۔

۸۔ متماثلہ مساوات

۳ + ۲ + ۲ + ۲ = ۳ + ۲ + ۲ + ۲ (۳ + ۲ + ۲ + ۲) = ۳ + ۲ + ۲ + ۲  
کو ثابت کرو جہاں

۸۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں  
۳ + ۲ + ۲ + ۲ = ۳ + ۲ + ۲ + ۲ = ۳ + ۲ + ۲ + ۲ = ۳ + ۲ + ۲ + ۲

۹۔ وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں  
۳ + ۲ + ۲ + ۲ = ۳ + ۲ + ۲ + ۲ = ۳ + ۲ + ۲ + ۲ = ۳ + ۲ + ۲ + ۲

۱۰۔ جواب :- لا۔ ۳ + ۲ + ۲ + ۲ = ۳ + ۲ + ۲ + ۲ = ۳ + ۲ + ۲ + ۲ = ۳ + ۲ + ۲ + ۲

یہ یاد رکھنا ضروری ہے کہ اکائی کے ن، وین جذروں کے جواب میں کسی تعداد کے ن، وین جذر ہوتے ہیں۔ مساوات  
لا۔ ۳ + ۲ + ۲ + ۲ = ۳ + ۲ + ۲ + ۲ = ۳ + ۲ + ۲ + ۲ = ۳ + ۲ + ۲ + ۲

کی اصلیں ۱ کے ن، وین جذر ہیں۔  
مثلاً ۱ کے تین جذر الکعب ہیں

۱، ۲، ۳

جہاں ۱، ۲، ۳ سے معمولی حسابی عمل کے بموجب ۱ کا حقیقی جذر الکعب  
تعبیر ہوتا ہے۔ ان میں سے ہر جذر مساوات لا۔ ۱ = ۰ کو پورا کرتا ہے۔ یہ واضح  
رہے کہ مندرجہ بالا تین جذر الکعب حاصل ہو جاتے ہیں اگر ان میں سے کسی ایک کو  
۱، ۲، ۳ سے ضرب دیا جائے۔

پس ہم دیکھتے ہیں کہ حقیقی جذر الکعب کے علاوہ دو خیالی جذر الکعب  
بھی ہوتے ہیں جو حقیقی جذر الکعب کو اکائی کے خیالی جذر الکعبوں سے ضرب



دینے سے حاصل ہوتے ہیں۔ مثلاً معمولی جذرا لکعب ۳ کے علاوہ عدد ۲۷ کے دو خیالی جذرا لکعب

$$-\sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} - \sqrt[3]{\frac{3}{2}} - \sqrt[3]{\frac{3}{2}} - \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$$

ہیں۔ لکعب لینے سے اس بیان کی تصدیق ہو سکتی ہے۔  
۱۰۔ وہ منطق مساوات بناؤ جس کی ایک اصل

$$\sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$$

ہو جہاں  $\sqrt[3]{\frac{3}{2}} = 1$ ۔ سوال ۸ کے ساتھ مقابلہ کرو۔

جواب :-  $\sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} = 0$

۱۱۔ منطق سروں کے ساتھ مساوات بناؤ جسکی ایک اصل (46)

$$\sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$$

ہو جہاں  $\sqrt[3]{\frac{3}{2}} = 1$ ،  $\sqrt[3]{\frac{3}{2}} = 1$ ۔  
مساوات

$$\sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} = 0$$

کی طرفین کا لکعب لینے سے اور لا کی بجائے اسکی بائیں طرف کی قیمت درج کرنے سے مساوات ملے گی

$$\sqrt[3]{\frac{3}{2}} - \sqrt[3]{\frac{3}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} - \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$$

پھر طرفین کا لکعب لینے سے حاصل ہو گا

$$(\sqrt[3]{\frac{3}{2}} - \sqrt[3]{\frac{3}{2}}) = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} - \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$$

اب چونکہ  $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$  اور  $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$  میں سے ہر ایک کی قیمت ۱ یا  $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$  ہو سکتی ہے اسلئے اس مساوات کی نو اصلیں ہیں

$$\sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$$

سہ لاف + سہ لاق ' سہ لاف + لاق ' سہ لاف + لاق  
 سہ لاف + سہ لاق ' لاف + سہ لاق ' لاف + سہ لاق

ہم یہاں یہ بھی دیکھتے ہیں کہ آخری مساوات میں طم اور طم داخل نہیں ہوتے  
 اسلئے ابتداً ان اصلوں میں سے کسی ایک کو لا کے مساوی قرار دیا جاسکتا ہے اور  
 مساوات مرتب کیجا سکتی ہے۔ آخری مساوات اس طرح بھی حاصل ہو سکتی تھی کہ  
 ہم لا۔ لاف۔ لاق کی شکل کے نو اجزائے ضربی کو باہم ضرب دیتے

جہاں یہ نو اجزائے ضربی مندرجہ بالا تو اصلوں سے حاصل ہوتے ہیں۔

۱۲۔ تین کبھی مساواتیں علیحدہ علیحدہ بناؤ جنکی اصلیں مثال مابقی کی مساوات کی  
 اصلوں میں سے تین تین (انتخابی ستونوں میں لکھی ہوئیں) کے جٹ ہوں۔  
 ہم ان مساواتوں کو مثال ۸ کی مدد سے لکھ سکتے ہیں اس طور پر کہ پہلے م

اور ن کو لاف، لاق کے مساوی، پھر سہ لاف، سہ لاق کے مساوی  
 اور آخر میں سہ لاف، سہ لاق کے مساوی لیتے ہیں۔

جواب :- لا۔ ۳ لاف ق لا۔ ف۔ ق۔ =

لا۔ ۳ سہ لاف ق لا۔ ف۔ ق۔ =

لا۔ ۳ سہ لاف ق لا۔ ف۔ ق۔ =

۲۷۔ اصلوں کے متشاکل تفاعل۔ کسی مساوات کی

اصلوں کے متشاکل تفاعل وہ تفاعل ہیں جنہیں اصلیں ایک ہی وضع پر داخل

ہوتی ہیں اس طور پر کہ تفاعل قیمت میں غیر متغیر رہتا ہے جب کسی دو اصلوں کو  
 آپس میں تبدیل کر دیا جاتا ہے۔ مثلاً اصلوں کے وہ تفاعل (اصلوں کا مجموعہ

(47)

اصولوں میں سے دو دو کے حاصل ضربوں کا مجموعہ (وغیرہ) جو دفعہ ۲۳ میں بیان ہوئے ہیں اس نوعیت کے تفاعل ہیں کیونکہ اگر ان میں سے کسی جملہ میں مثال کے طور پر عم کی بجائے عمہ اور عمہ کی بجائے عم لکھا جائے تو جملہ کی قیمت غیر متغیر رہتی ہے۔

دفعہ ۲۳ کے تفاعل اصولوں کے سادہ ترین متشاکل تفاعل ہیں کیونکہ انہیں ہر اصل صرف اپنی پہلی قوت میں داخل ہوتی ہے۔ ہم اصولوں کی قیمتوں کو سروں کی رقوم میں معلوم کئے بغیر دفعہ ۲۳ کی مساد اتوں (۲) کی مدد سے اصولوں کے مختلف متشاکل تفاعلوں کی قیمتیں سرور کی رقوم میں معلوم کر سکتے ہیں۔ آئندہ کسی باب میں جس میں اس مضمون پر بحث کی جائیگی ہم ثابت کرینگے کہ اصولوں کے کسی منطق متشاکل تفاعل کو سروں کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے۔ یہاں جو مثالیں دی جائیگی ان میں سے اکثر کعبی اور چاروچی کی سادہ صورتوں سے متعلق ہونگی اور یہ مثالیں فی الحال اس قسم کے جملوں کو سروں کی رقوم میں معمولی ابتدائی طریقوں سے حاصل کرنے کے لئے کافی ہیں۔ عام طور پر کسی متشاکل تفاعل کو اسکی کسی رقم کے پیچھے علامت  $\sim$  لگا کر تعبیر کیا جاتا ہے اور اسکی مدد سے پورا تفاعل لکھا جاسکتا ہے۔ مثلاً اگر کعبی کی اصلیں عمہ، بہ، جہ ہوں تو  $\sim$  عمہ بہ سے متشاکل تفاعل

تعبیر ہوگا جس میں دو دو اصولوں نے جتنے حاصل ضرب مل سکتے ہیں انکو لیا گیا ہے اور ہر ایک کا جدا گانہ مرتب لیکر جمع کیا گیا ہے۔ اسی طرح  $\sim$  عمہ بہ سے مجموعہ

تعبیر ہوگا جس میں دو دو اصولوں کی جتنی ترتیبیں ہو سکتی ہیں لی گئی ہیں اور ہر رقم کی پہلی اصل کا مرتب لیا گیا ہے۔

حسب ذیل مثالوں میں مختلف متشاکل تفاعل واقع ہونگے۔ انہی مدد سے طالب علم کو اس قسم کے جملے لکھنے کی مشق ہو جائیگی جب

نمونہ کی ایک قسم دی گئی ہو۔

## مثالیں

(48)

۱۔ کبھی مساوات

$لا + ف + لا + ق + لا + ر =$   
کی اصلوں کے جملہ  $ح$  عہدہ کی قیمت معلوم کرو۔  
مساواتوں

$عہ + بہ + جہ = - ف$

$بہ + جہ + جہ + عہ = ق$

کو باہم ضرب دینے سے حاصل ہوگا

$ح عہ + بہ + ۳ عہ بہ جہ = - ف ق$

پس  $ح عہ + بہ = ۳ - ر - ف ق$

۲۔ اسی کبھی مساوات کی صورت میں

$عہ + بہ + جہ$

کی قیمت معلوم کرو۔ جواب :-  $ح عہ = ف - ۲ ق$

۳۔ اسی کبھی مساوات کی صورت میں

$عہ + بہ + جہ$

کی قیمت معلوم کرو۔

$ح عہ$  اور  $ح عہ$  کی قیمتوں کو ضرب دینے سے حاصل ہوگا

$عہ + بہ + جہ + ۳ عہ + جہ = - ف + ۲ ق$

پس مثال ۱ سے

$ح عہ = ۳ - ف ق - ۳$

۴۔ اسی کبھی مساوات کی صورت میں

$بہ + جہ + جہ + عہ + عہ + بہ$

کی قیمت معلوم کرو۔

ہیں یہ آسانی حاصل ہوگا

$$ب^۱ ج^۱ + ج^۱ ع^۱ + ع^۱ ب^۲ + ۲ ع^۱ ب^۱ ج^۱ (ع + ب + ج) = ق^۱$$

جس سے  $۳ ع^۱ ب^۱ = ق^۱ - ۲ ف$

۵۔ اسی کجی مساوات کی صورت میں

$$(ب + ج) (ج + ع) (ع + ب)$$

کی قیمت معلوم کرو۔

یہ جملہ  $۲ ع^۱ ب^۱ ج^۱ + ۳ ع^۱ ب^۱$  کے مساوی ہے۔ جواب :-  $ر - ف$

۶۔ چار درجی مساوات

$$لا + ف لا + ق لا + ر لا + س = ۰$$

کی اصولوں کے متشاکل تفاعل

$$ع^۱ ب^۱ ج^۱ + ع^۱ ب^۱ ض^۱ + ع^۱ ج^۱ ض^۱ + ب^۱ ج^۱ ض^۱ + ب^۱ ع^۱ ض^۱ + ب^۱ ج^۱ ض^۱$$

$$+ ج^۱ ع^۱ ب^۱ + ج^۱ ع^۱ ض^۱ + ج^۱ ب^۱ ض^۱ + ع^۱ ب^۱ ض^۱ + ع^۱ ج^۱ ض^۱ + ع^۱ ب^۱ ض^۱$$

کی قیمت معلوم کرو۔

$$ع + ب + ج + ض = ف$$

$$ع ب ج + ع ب ض + ع ج ض + ب ج ض + ب ج ض = ر$$

کو باہم ضرب دینے سے حاصل ہوگا

$$۳ ع^۱ ب^۱ ج^۱ + ۲ ع^۱ ب^۱ ج^۱ ض^۱ = ف ر$$

$$۳ ع^۱ ب^۱ ج^۱ = ف ر - ۲ س$$

۷۔ اسی چار درجی مساوات کی صورت میں متشاکل تفاعل

$$ع^۱ + ب^۱ + ج^۱ + ض^۱$$

کی قیمت معلوم کرو۔

$۳ ع$  کا مربع لینے سے ہمیں یہ آسانی حاصل ہوگا

$$۳ ع^۱ = ف^۱ - ۲ ق$$

۸۔ اسی چار درجی مساوات کی صورت میں متشاکل تفاعل

$$ع^۱ ب^۱ + ع^۱ ج^۱ + ع^۱ ض^۱ + ب^۱ ج^۱ + ب^۱ ض^۱ + ج^۱ ض^۱$$

کی قیمت معلوم کرو۔

مساوات

$$3 \text{ عہ } 2 = 2 \text{ ق}$$

کا مربع لینے سے ہمیں حاصل ہوگا

$$3 \text{ عہ } 2 + 2 \text{ عہ } 2 = 2 \text{ ق} + 2 \text{ عہ } 2 + 2 \text{ عہ } 2 = 2 \text{ ق}$$

پس مثال ۶ سے

$$3 \text{ عہ } 2 = 2 \text{ ق} - 2 \text{ ف} + 2 \text{ س}$$

۹۔ اسی چار درجی مساوات کی صورت میں  $3 \text{ عہ } 2$  بہ کی قیمت معلوم کرو۔

اس مثال کا تفاعل کو بنانے کے لئے ہم حروف عہ، بہ کی دو تہیں عہ بہ اور یہ عہ لیتے ہیں۔ ان سے  $3 \text{ عہ } 2$  کی دو رقیں عہ بہ اور یہ عہ حاصل ہوتی ہیں۔ اسی طرح حروف عہ، بہ، جہ میں سے ہر زوج سے دو رقیں حاصل ہونگی۔ اس طرح مثال کا تفاعل میں کل بارہ رقیں ہونگی۔

مساواتوں

$$3 \text{ عہ } 2 = 2 \text{ ق} - 2 \text{ ف} + 2 \text{ س}$$

کو باہم ضرب دو اور دیکھو کہ

$$3 \text{ عہ } 2 = 2 \text{ ق} - 2 \text{ ف} + 2 \text{ س} + 2 \text{ عہ } 2 = 2 \text{ ق} - 2 \text{ ف} + 2 \text{ س}$$

[اس آخری مساوات سے جس قسم کے نتیجے تعبیر ہوتے ہیں انہی تصدیق اس طرح ہو سکتی ہے کہ مساوات کی طرفین میں رقیوں کی تعداد وہی ہونی چاہئے۔ مثلاً موجودہ مثال میں چونکہ  $3 \text{ عہ } 2$  میں چار رقیں اور  $3 \text{ عہ } 2$  میں چھ رقیں ہیں ان کے حاصل ضرب میں ۲۴ رقیں ہونی چاہئیں اور یہ درحقیقت  $3 \text{ عہ } 2$  بہ کی بارہ رقیں اور  $3 \text{ عہ } 2$  بہ جہ کی بارہ رقیں ہیں۔]

اس لئے اشلہ با سبق کے نتیجوں کو استعمال کرنے سے ہمیں حاصل ہوگا

$$3 \text{ عہ } 2 = 2 \text{ ق} - 2 \text{ ف} + 2 \text{ س}$$

۱۰۔ اسی چار درجی مساوات کی صورت میں

$$3 \text{ عہ } 2 + 2 \text{ عہ } 2 + 2 \text{ عہ } 2 = 2 \text{ ق} + 2 \text{ ق} + 2 \text{ ق}$$



تقسیم کرنے سے حاصل ہو سکتا ہے۔

۱۳ — کبھی مساوات

۱۳ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲  
کی صورت میں اصولوں عہ، بہ، جہ کے حسب ذیل متشاکل تفاعل کی قیمت سروں کی رقوم میں معلوم کرو۔

(بہ - جہ) + (جہ - عہ) + (عہ - بہ)

نوٹ: — عام طور پر مساوات کے سروں کو ثنائی 'سروں کی صورت میں لکھنا مفید ہوگا جیسا کہ مثال بالا میں کیا گیا ہے یعنی حرفی سروں ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ وغیرہ کے علاوہ عددی سروں ہی ہوں جو مسئلہ ثنائی کی مدد سے پھیلاؤ میں واقع ہوتے ہیں یہاں چونکہ مساوات تیسرے درجہ کی ہے اسلئے یکے بعد دیگرے آئینوالے عددی سروں وہ ہیں جو تیسری قوت کے پھیلاؤ میں واقع ہوتے ہیں یعنی ۱، ۳، ۵، ۷، ۹۔  
ہمیں یہ آسانی حاصل ہوگا

$$۱۸ = \{ (بہ - جہ) + (جہ - عہ) + (عہ - بہ) \} ۱۸ = (۱۸ - ۱۸)$$

۱۴ — مساوات درجہ دوم

(لا - عہ) + (بہ - جہ) + (لا - بہ) + (جہ - عہ) + (لا - جہ) + (عہ - بہ) = ۰  
کے متواتر سروں کو مثال باسبق کی کبھی مساوات کے سروں کی رقوم میں بیان کر دیا  
کبھی کی اصلیں عہ، بہ، جہ ہیں۔  
یہاں مثال باسبق کے متشاکل تفاعل کے علاوہ حسب ذیل دو متشاکل  
تفاعل کی قیمتیں معلوم کرنی ہوں گی:۔

$$عہ (بہ - جہ) + بہ (جہ - عہ) + جہ (عہ - بہ)$$

$$عہ (بہ - جہ) + بہ (جہ - عہ) + جہ (عہ - بہ)$$

جواب:۔ (۱۸ - ۱۸) + (۱۸ - ۱۸) + (۱۸ - ۱۸)

$$۰ = (۱۸ - ۱۸)$$

۱۵ — مثال ۳ کی کبھی مساوات کی صورت میں

$$(۲ - عہ - بہ - جہ) + (۲ - جہ - عہ - بہ)$$



کی قیمت سروں کی رقوم میں معلوم کرو۔

$$\text{چونکہ } ۲\text{عہ} - ۲\text{بہ} - ۳\text{عہ} = ۳\text{عہ} - (۲\text{عہ} + ۲\text{بہ} + ۳\text{عہ}) + \frac{۱۳}{۱}$$

(51) اسلئے مطلوبہ قیمت متماثلہ مساوات

$$\frac{۱۳}{۱} + \frac{۱۳}{۱} + \frac{۱۳}{۱} + \frac{۱۳}{۱} + \frac{۱۳}{۱} = \frac{۱۳}{۱} (۱ - ۱) + \frac{۱۳}{۱} (۱ - ۱) + \frac{۱۳}{۱} (۱ - ۱) + \frac{۱۳}{۱} (۱ - ۱) + \frac{۱۳}{۱} (۱ - ۱)$$

میں لا کی بجائے  $\frac{۱۳}{۱}$  درج کرنے سے یہ آسانی حاصل ہو سکتی ہے۔

جواب :-  $\frac{۱۳}{۱} (۲\text{عہ} - ۲\text{بہ} - ۳\text{عہ}) + \frac{۱۳}{۱} (۲\text{عہ} - ۲\text{بہ} - ۳\text{عہ}) + \frac{۱۳}{۱} (۲\text{عہ} - ۲\text{بہ} - ۳\text{عہ}) + \frac{۱۳}{۱} (۲\text{عہ} - ۲\text{بہ} - ۳\text{عہ}) + \frac{۱۳}{۱} (۲\text{عہ} - ۲\text{بہ} - ۳\text{عہ})$

۱۶ — چار درجی مساوات

۱۳ + ۱۳ + ۱۳ + ۱۳ + ۱۳ + ۱۳ + ۱۳ + ۱۳ = ۱۳  
کے سروں کی رقوم میں اصولوں کے حسب ذیل متماثل تفاعل کی قیمت معلوم کرو:-  
(۲بہ - ۲عہ) + (۲عہ - ۲بہ) + (۲عہ - ۲بہ) + (۲عہ - ۲بہ) + (۲عہ - ۲بہ) + (۲عہ - ۲بہ) + (۲عہ - ۲بہ) + (۲عہ - ۲بہ)  
یہاں مساوات بالا میں عددی سروہ ہیں جو چوتھی قوت کے ثنائی جملہ کے پھیلاؤ میں واقع ہوتے ہیں۔ زیر بحث متماثل تفاعل

$$۲\text{عہ} - ۲\text{بہ} = ۲\text{عہ} - ۲\text{بہ} + ۱۳\text{عہ} - ۱۳\text{بہ}$$

کے متماثل ہے۔ مثالوں ۶ اور ۸ کے نتیجوں کو استعمال کیا جائے تو

$$\frac{۱۳}{۱} (۲\text{بہ} - ۲\text{عہ}) + \frac{۱۳}{۱} (۲\text{عہ} - ۲\text{بہ}) + \frac{۱۳}{۱} (۲\text{عہ} - ۲\text{بہ}) + \frac{۱۳}{۱} (۲\text{عہ} - ۲\text{بہ}) + \frac{۱۳}{۱} (۲\text{عہ} - ۲\text{بہ}) + \frac{۱۳}{۱} (۲\text{عہ} - ۲\text{بہ}) + \frac{۱۳}{۱} (۲\text{عہ} - ۲\text{بہ}) + \frac{۱۳}{۱} (۲\text{عہ} - ۲\text{بہ})$$

$$= \frac{۱۳}{۱} (۲\text{بہ} - ۲\text{عہ} + ۱۳\text{عہ} - ۱۳\text{بہ})$$

۱۷ — مثال ۱۶ کی مساوات کی چار اصولوں میں سے دو دو کے چھ حاصل ضرب

لئے جائیں اور حاصل ضرب میں (مثلاً ۲بہ - ۲عہ) بقیہ دو اصولوں کا حاصل ضرب (یعنی ۲عہ - ۲بہ) جمع کیا جائے تو ہمیں تین مجموعے ملینگے

$$۲\text{بہ} - ۲\text{عہ} + ۲\text{عہ} - ۲\text{بہ} + ۱۳\text{عہ} - ۱۳\text{بہ}$$

اب سروں کی رقوم میں اصولوں کے حسب ذیل دو متماثل تفاعلوں کی

قیمتیں معلوم کرنا مطلوب ہے:-

(جہ + بہ ضہ) (عہ بہ + جہ ضہ) + (عہ بہ + جہ ضہ) (بہ جہ + عہ ضہ)  
 + (بہ جہ + عہ ضہ) (جہ عہ + بہ ضہ) (جہ عہ + بہ ضہ)  
 (بہ جہ + عہ ضہ) (جہ عہ + بہ ضہ) (عہ بہ + جہ ضہ)  
 ان میں سے پہلا متدکرہ بانا مجموعوں میں سے دو دو کے حاصل ضربوں کا مجموعہ  
 ہے اور دوسرا تینوں کا مسلسل حاصل ضرب۔ اب چونکہ یہ تینوں تفاعل (متدکرہ بالا  
 تین مجموعے) چار درجی مسادات کے نظریہ میں بہت اہمیت رکھتے ہیں اسلئے ہم ان کو  
 اختصاراً حروف لہ، مہ، نہ سے تعبیر کریں گے۔ اس لئے ہمیں مہ نہ + نہ لہ + لہ مہ  
 اور لہ مہ نہ کی قیمتیں سروں کی رقوم میں معلوم کرنا ہونگی۔  
 قبل الذکر متشاکل تفاعل ۳ عہ یہ جہ ہے جس کو بہ آسانی حسب ذیل  
 طریقہ سے بیان کیا جاسکتا ہے :-

$$\begin{matrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{matrix} \text{ مہ نہ} = ۴ (۲ ۱ ۳ - ۱ ۲ ۳) \\ \text{موخر الذکر متشاکل تفاعل ضرب دینے کے بعد}$$

عہ بہ جہ ضہ (عہ + بہ + جہ + عہ) + عہ بہ جہ ضہ (عہ + بہ + جہ + عہ) +  
 عہ بہ جہ ضہ (عہ + بہ + جہ + عہ) + عہ بہ جہ ضہ (عہ + بہ + جہ + عہ)  
 کے مساوی ہے اور ہم معمولی عمل حساب کے ذریعہ حاصل کرتے ہیں  
 لہ مہ نہ = ۸ (۲ ۱ ۳ - ۱ ۲ ۳ - ۳ ۱ ۲ + ۲ ۱ ۳)  
 ۱۸۔ مثال ۱۶ کی چار درجی مسادات کے سروں کی رقوم میں اصولوں کے  
 (52) حسب ذیل متشاکل تفاعل کی قیمت معلوم کرو :-

{ (جہ - عہ) (بہ - ضہ) - (عہ - بہ) (جہ - ضہ) } { (عہ - بہ) (جہ - ضہ) - (بہ - جہ) (عہ - ضہ) }  
 { (بہ - جہ) (عہ - ضہ) - (جہ - عہ) (بہ - ضہ) }  
 یہ تفاعل بھی چار درجی مسادات کے نظریہ میں کافی اہمیت رکھتا ہے۔ اس  
 غرض سے کہ اسکے لکھ لینے میں کوئی اہم پیرا نہ ہو ہم اس ترقیم کی تشریح کریں گے جو اس کتاب  
 میں ہمیشہ استعمال ہوگی۔ یہ ترقیم اس وقت بھی اسی طرح کارآمد ہوگی جب دوسرے  
 ایسے تفاعل دئے جائیں جو چار درجی مسادات کی اصولوں کے فرقوں پر مشتمل ہوں۔  
 اصولوں عہ، بہ، جہ کو دائری ترتیب میں رکھنے سے ہمیں تین نسر



جواب :-  $\text{ا}^2 \text{ب} = (\text{ع} - \text{ب}) = ۲۸$  ( $\text{ا}^2 - \text{ا} - \text{ب}$ )  
 ۲۰۔ مثال ۱۶ کے چار درجہ کی صورت میں سروں اور اصولوں کے درمیان حسب ذیل ربط ثابت کرو :-

$$\text{ا}^2 (\text{ب} + \text{ج} - \text{ع} - \text{ض}) (\text{ج} + \text{ع} - \text{ب} - \text{ض}) (\text{ع} + \text{ب} - \text{ج} - \text{ض})$$

$$= ۳۲ (\text{ا}^2 - \text{ا} - \text{ب}) (\text{ا}^2 - \text{ا} - \text{ب} + ۲) (\text{ا}^2 - \text{ا} - \text{ب} + ۲)$$

۲۸۔ متشاکل تفاعلوں سے متعلق مسائل - مندرجہ ذیل (58)

دو مسئلے جن پر ہم اس مضمون کی بحث ختم کرتے ہیں بہت سی مثالوں میں ان نتیجوں کی تصدیق کرنے میں مفید ثابت ہوئے جو متشاکل تفاعلوں کی قیمتوں کو سروں کی رقوم میں محسوب کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔

مسئلہ ۱۔ اصولوں کے کسی متشاکل تفاعل کی کسی رقم میں سب اصولوں کے قوت نماؤں کا مجموعہ سروں کی رقوم میں تفاعل کی متناظر قیمت کی ہر رقم کے لاحقوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

ظاہر ہے کہ متشاکل تفاعل کی ہر رقم کے لئے قوت نماؤں کا مجموعہ وہی ہوتا ہے۔ اس مجموعہ کو ہم اس تفاعل کا ”تمام اصولوں کا درجہ“

کہہ سکتے ہیں۔ اس مسئلہ کی صداقت دفعہ سابق کی مثالوں ۱۳، ۱۵، ۱۶، ۱۷ اور غیر کی مخصوص صورتوں سے ظاہر ہے۔ عام صورت میں اس کی تصدیق دفعہ ۲۳ کی مساواتوں

(۲) سے ہو سکتی ہے کیونکہ ان مساواتوں میں ہر سر کا لاحقہ اصولوں کے متناظر تفاعل کے ”تمام اصولوں کے درجہ“ کے مساوی ہے۔ پس سروں کی کسی قوتوں کے کسی حاصل ضرب میں لاحقوں کا مجموعہ اصولوں کے متناظر تفاعل کے تمام رقموں کے درجہ کے مساوی ہونا چاہئے۔

مسئلہ ۲۔ جب کسی مساوات کو ثنائی سروں کے ساتھ لکھا جائے تو اصولوں کے کسی متشاکل تفاعل کے لئے سروں کی رقوم میں ایسا جملہ لکھا جائے جس میں تمام رقموں کے عددی اجزائے ضربی کا جبری مجموعہ صفر کے مساوی ہوگا اگر متشاکل تفاعل صرف اصولوں کے قوتوں کا تفاعل ہو۔

اس مسئلہ کی صداقت عام مساوات کو ثنائی سروں کے ساتھ لکھ کر تمام

سروں  $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n$  کو ایک کے مساوی فرض کرنے سے یعنی مساوات

$$\lambda^1 + \lambda^2 + \dots + \lambda^n = \frac{(1-n)}{2 \times 1} \lambda^1 + \dots + \lambda^n = 0$$

میں  $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n$  میں سے ہر ایک کو ایک کے مساوی لینے سے ظاہر ہے۔ کیونکہ اس صورت میں یہ مساوات ہو جائیگی  $(1+n) = 0$ ۔ یعنی تمام اصلیں مساوی ہونگی۔ پس اصلوں کے فرقوں کا کوئی تفاعل صفر کے مساوی ہوگا اور اس لئے سروں کا تفاعل بھی صفر کے مساوی ہوگا کیونکہ یہ تفاعل اصلوں کے تفاعل کے مساوی ہے۔ لیکن یہ تفاعل عددی اجزائے ضربی کے جبری مجموعہ پر مشتمل ہے جبکہ اس میں تمام سروں  $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n$  ایک کے مساوی بنائے جائیں۔ اس مسئلہ کی مثالیں ۱۳، ۱۵، ۱۶، ۱۸، ۲۰ (صفحہ ۲۴) ہیں۔

## مثالیں

(54)

### ۱۔ متشکل تفاعل

$$\frac{\lambda^2 + \lambda^3}{\lambda^1} + \frac{\lambda^2 + \lambda^3}{\lambda^1} + \frac{\lambda^2 + \lambda^3}{\lambda^1}$$

کی قیمت ف، ق، ر کی رقوم میں معلوم کرو جہاں  $\lambda^1$ ،  $\lambda^2$ ،  $\lambda^3$  جب کبھی مساوات  $\lambda^1 + \lambda^2 + \lambda^3 = 0$ ۔

جواب :-  $\frac{3}{\lambda^1}$ ۔

۲۔ اسی مساوات کے لئے

$$(\lambda^1 + \lambda^2 + \lambda^3) + (\lambda^1 + \lambda^2 + \lambda^3) + (\lambda^1 + \lambda^2 + \lambda^3)$$

کی قیمت معلوم کرو۔

جواب :-  $3\lambda^1 + 3\lambda^2 + 3\lambda^3$ ۔

۳۔ اسی مساوات کے لئے  $\lambda^1$  کی قیمت معلوم کرو۔

$$\lambda^1 + \lambda^2 + \lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda^1 = -\lambda^2 - \lambda^3$$

جواب :-  $3\lambda^1 + 3\lambda^2 + 3\lambda^3$ ۔

۴۔ اسی مساوات کے لئے متشاکل تفاعل

$$(بہ - ۲) + (جہ - ۳) + (عہ - ۲) + (دہ - ۲)$$

کی قیمت معلوم کرو۔

۳۔ کامریج لینے سے ۳ علا بہ آسانی حاصل ہوتا ہے (دیکھو دفعہ ۲ مثال ۳)

جواب :- ۲ فا - ۱۲ فاق + ۱۲ فر + ۱۸ فاق

$$- ۱۸ فاق - ۶ ق۳$$

۵۔ اسی مساوات کے لئے

$$\frac{بہ + ۲}{بہ + جہ} + \frac{جہ + ۲}{جہ + عہ} + \frac{عہ + ۲}{عہ + دہ}$$

جواب :- ۲ فاق - ۴ فر - ۲ ق۳

کی قیمت معلوم کرو۔

۶۔ اسی مساوات کے لئے

$$\frac{بہ + ۲}{بہ + جہ} + \frac{جہ + ۲}{جہ + عہ} + \frac{عہ + ۲}{عہ + دہ}$$

جواب :- ۲ فا - ۳ فاق + ۵ فر + ۲ ق۳

کی قیمت معلوم کرو۔

۷۔ اسی مساوات کے لئے

$$\frac{بہ + ۲}{بہ + جہ} + \frac{جہ + ۲}{جہ + عہ} + \frac{عہ + ۲}{عہ + دہ}$$

کی قیمت معلوم کرو۔

جواب :- ۲ فا - ۲ فاق + ۴ فر - ۸ ق۳

۸۔ اسی مساوات کے لئے متشاکل تفاعل ۳ (عہ - ۲) کی قیمت معلوم کرو۔ (55)

جواب :- ۳ فاق - ۴ فر - ۴ ق۳ - ۲ ق۳ - ۲ ق۳ - ۲ ق۳

۹۔ مساوات

$$لا + ف لا + ق لا + ر لا + س =$$

کیلئے  $\frac{ع}{چ}$  کی قیمت ف، ق، ر، س کی رقوم میں معلوم کرو۔

$$۔ یہاں  $\frac{ع}{چ} = \frac{1}{ع} \frac{ع}{چ} + \frac{ع}{چ} \frac{ع}{چ} =$$$

$$\text{اور } \frac{ع}{چ} \frac{ع}{چ} + ۲ = \frac{1}{ع} \frac{ع}{چ}$$

$$\text{جواب :- } \frac{ق ر - ۲ ق س - ف ر س + ۲ س}{س}$$

۱۰۔ مساوات

$$لا + ب لا + ب لا + ب لا + ..... + ب لا + ب لا =$$

کی اصلوں کے تفاعل  $\frac{ع}{چ}$  کی قیمت معلوم کرو۔

$$\text{جواب :- } \frac{بن - ۱ بن - ۲ بن + ۱ بن + ۲ بن - ۲ بن}{بن}$$

۱۲۔ کعبی مساوات

$$لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا =$$

کے سروں کی رقوم میں  $\frac{ع}{چ}$  (۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱) کی قیمت معلوم کرو۔

$$\text{جواب :- } \frac{۱}{۱} (۱ - ۱ - ۱ - ۱ - ۱ - ۱ - ۱ - ۱)$$

۱۳۔ مساوات

$$لا + ب لا + ب لا + ..... + ب لا + ب لا =$$

کی اصلوں کے متشکل تفاعل  $\frac{ع + ۲ ع}{ع + ع}$  کی قیمت معلوم کرو۔

دیا ہوا تفاعل شکل ذیل میں لکھا جاسکتا ہے:-

$$\begin{aligned} & 1 - \left\{ \frac{1}{\text{عم}_1} + \dots + \frac{1}{\text{عم}_m} + \frac{1}{\text{عم}_n} \right\} \\ & + \left\{ \frac{1}{\text{عم}_1} + \dots + \frac{1}{\text{عم}_m} + \frac{1}{\text{عم}_n} \right\} \text{عم}_1 - 1 \\ & + \dots \\ & + \left\{ \frac{1}{\text{عم}_1} + \dots + \frac{1}{\text{عم}_m} + \frac{1}{\text{عم}_n} \right\} \text{عم}_n - 1 \\ & \text{یا } 3 \text{ عم}_1 - \frac{1}{\text{عم}_1} - \text{ن} - \text{پس و قس علی ہذا} \end{aligned}$$

(56)

جواب:-  $\frac{3 \text{ عم}_1 - 1}{\text{عم}_1} - \text{ن}$

۱۴۔ مساوات

۱۴۔ مساوات  
 $\text{ہات} - \text{عہ} + \text{ہات} - \text{بہ} + \text{ہات} - \text{جہ} = 0$   
 کو منطق شکل میں لاؤ اور ت میں حاصل ہونیوالی مساوات کے سروں کو  
 کبھی مساوات مثال (۱) کے سروں کی رقوم میں بیان کرو۔  
 جواب:-  $3 \text{ ت} - 2 (\text{ف} - 2 \text{ ق}) - \text{ف} + 4 \text{ ف} - \text{ق}$

۱۵۔ اگر مثال (۶) کے چار درجہ کی اصلیں  $\text{عہ}$ ،  $\text{بہ}$ ،  $\text{جہ}$ ،  $\text{ضہ}$  ہوں تو ثابت کرو کہ  
 $(\text{عہ} + 1)(\text{بہ} + 1)(\text{جہ} + 1)(\text{ضہ} + 1) = (1 - \text{ق} + \text{س}) + (\text{ف} - \text{ر})$   
 مساوات لاؤ  $= 1$  کی ہر اصل کو باری باری سے دفعہ ۱۶ کی مساوات متماثلہ  
 میں درج کرو اور ضرب دو۔

۱۶۔ ن دیں درجہ کی عام مساوات کی اصلوں اور سروں کے درمیان ربط  
 ذیل ثابت کرو:-

$$(\text{عہ} + 1)(\text{بہ} + 1) \dots (\text{عم}_1 + 1) = (1 - \text{بہ} + \text{بہ} - \dots) + (\text{بہ} - \text{بہ} + \dots)$$





ایک ثابت مبداء سے مساوات

$$۱ لا + ۳ ب لا + ۳ ج لا + د = ۰$$

(57) کی اصلوں کے مساوی ہیں۔ وہ شرط معلوم کرو کہ نقطوں (ا، ب، ج) میں سے ایک نقطہ باقی دو نقطوں کے درمیانی فاصلے کی تقصیف کرے۔  
دفعہ ۲ کی مثال ۱۵ سے مقابلہ کرو۔

جواب :- ۱ د - ۳ ب ج + ۲ ب = ۰

۲۳ - سوال گذشتہ کی ترقیم کو قائم رکھو اور وہ شرط معلوم کرو کہ نقطوں (ا، ب، ج) سے ایک موسیقی تقسیم بنے۔

جواب :- ۱ د - ۳ ب ج + د ج = ۰

اسکو مثال ۲۴ کے نتیجے سے اخذ کیا جاسکتا ہے اس طور پر کہ اصلوں کو ان کے مکانیوں میں بدل لاجائے۔ یا اسکو یہ آسانی آزادانہ محسوب کیا جاسکتا ہے۔

۲۴ - اگر مساوات

$$۱ لا + ۴ ب لا + ۶ ج لا + ۴ د لا + ع = ۰$$

کی اصلوں ع، ب، ج، د میں ایسا ربط ہو کہ ع - د، ب - ع، ج - ب، د - ج سلسلہ موسیقی میں ہیں تو ثابت کرو کہ

$$۱ ج + ۲ ب ج + د - ۱ د - ب ع - ج = ۰$$

دفعہ ۲ مثال ۱۸ سے مقابلہ کرو۔

۲۵ - وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں

$$\frac{ب ج + سم ج ع + سم ع ب}{ع + سم ب + سم ج} = \frac{ب ج + سم ج ع + سم ع ب}{ع + سم ب + سم ج}$$

ہوں جہاں سم = ۱ اور ع، ب، ج کبھی مساوات

$$۱ لا + ۳ ب لا + ۳ ج لا + د = ۰$$

کی اصلیں ہیں۔ جواب :- (۱ ج - ب لا) + (۱ د - ب ج) + لا (ب د ج) = ۰  
دفعہ ۲ کی مثالوں ۱۳ اور ۱۴ سے مقابلہ کرو۔

۲۶ - (۲ ب ج - ج ع - ع ب) (۲ ج ع - ع ب - ب ج) (۲ ع ب - ب ج - ج ع)

(59)

جواب :-  $a + c + f + r =$

۳۷۔ وہ شرط معلوم کرو کہ چار درجہ مساوات

$$لا + ف + لا + ق + لا + ر + لا + س = .$$

کی دو اصلوں 'عہ' بہ میں رابطہ عہ بہ + ا = موجود ہو۔

مطلوبہ بشرط 'س کی قوتوں میں مرتبہ' حسب ذیل ہے،

$$+ق + ف + ر + ز + (ف + ف + ر - ق - ق - ا) + س + (ق - ا) + س + س =$$

۳۸ — مساوات

$$= \alpha^0 + \alpha^1 + \alpha^2 + \dots + \alpha^{r-1} + \alpha^r$$

کی اصلوں کے تفاعل ۛ (عم - عم) عم عم عم ..... عن کی قیمت معلوم کرو۔

اسکو بہ آسانی مثال ۱۳ میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔

جواب :- (۱) { ب ب ب ب - ن ب ن }

۳۹۔ اگر معادوات

$$= 1 + \dots + \frac{1}{r} + \frac{(1-r)^n}{r \times 1} + \frac{1}{r} + \dots + 1$$

کی اصلیں سلسلہ حابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ انکو جملہ

$$\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{1 + \lambda_1 \lambda_2} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \pm \frac{\lambda_1}{\lambda_2} -$$

میں (ن جفت ہوتو) رکو ۱، ۳، ۵، ..... کن۔ اتمام قیمتیں دینے سے اور (ن طاق

(ہوتو) ۶، ۴، ۲..... ن۔ تمام قیمتیں دینے سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

۴۰۔ تین مقداروں ع، بہ، جہ کے فرقوں کو عم، ہم، جم سے تعبیر کیا جائے یعنی

ع = ب - ج + د = ج - د + ع = د - ع + ب = ع - ب + ج = ب - ج + د

توثیبت کروکہ

$$\left\{ \begin{matrix} \text{عم}^2 + \text{بر}^2 + \text{جبر}^2 \\ \text{عم}^2 + \text{بر}^2 + \text{جبر}^2 \end{matrix} \right\} \frac{1}{2} = \text{عم}^2 + \text{بر}^2 + \text{جبر}^2$$



## چوتھا باب مساواتوں کا استحالہ

۲۹۔ مساواتوں کا استحالہ۔ بہت سی مثالوں میں کسی مساوات کی اصلوں کی قیمتیں، سروں کی رقوم میں معلوم کئے بغیر ہم اسکو معمولی اندراجات کے ذریعہ یا اصلوں کے متشاکل تفاعلوں کی مدد سے دوسری ایسی مساوات میں تحویل کر سکتے ہیں، جسکی اصلیں دی ہوئی مساوات کی اصلوں کے ساتھ مقررہ روابط رکھتی ہوں۔ اس قسم کے استحالہ سے مساوات کی اصلوں وغیرہ پر بحث کرنے میں بڑی مدد ملتی ہے۔ اب ہم اہم ترین ابتدائی استحالوں کی تشریح کریں گے۔

۳۰۔ اصلیں بہ تبدیل علامت۔ ایک مساوات کو دوسری مساوات میں تحویل کرنے کے لئے جسکی اصلیں دی ہوئی مساوات کی اصلوں کے مساوی مگر مختلف علامت ہوں فرض کرو کہ مساوات

$$a + b - c + \dots + m - n = 0$$

کی اصلیں  $a, b, c, \dots, m, n$  ..... عن ہیں۔ تب ہمیں مساوات متماثلہ ملیگی

$$\text{لا} + \text{ب} - \text{لا}^1 + \text{ب}^1 - \text{لا}^2 + \text{ب}^2 - \dots + \text{ب}^n \equiv (\text{لا} - \text{عم}) (\text{لا} - \text{عم}) \dots (\text{لا} - \text{عم})$$

اب اگر لا کو - ما میں بدل دیا جائے تو خواہ ن جفت ہو یا طاق ہیں مساوات متماثلہ ملیگی

$$\text{ما} - \text{ب} - \text{ما}^1 + \text{ب}^1 - \text{ما}^2 + \text{ب}^2 - \dots + \text{ب}^n \equiv (\text{ما} + \text{عم}) (\text{ما} + \text{عم}) \dots (\text{ما} + \text{عم})$$

اسلئے ما کے اس کثیرالارقام کو صفر کے مساوی رکھا جائے تو ایسی مساوات ملیگی جسکی اصلیں ہوں گی - عم<sup>۱</sup> - عم<sup>۲</sup> - عم<sup>۳</sup> - ..... - عم<sup>n</sup> - عم<sup>n</sup> - اس لئے مطلوب استحالہ حاصل کرنے کے لئے دی ہوئی مساوات کی دوسری 'چوتھی' چھٹی وغیرہ رقموں کی صرف علامتیں بدلنی چاہئیں -

### مثالیں

۱ - ایسی مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں مساوات

$$\text{لا}^۱ + \text{لا}^۲ + \text{لا}^۳ - \text{لا}^۴ - \text{لا}^۵ + \text{لا}^۶ + \text{لا}^۷ + \text{لا}^۸ = ۱$$

کی اصلیں بہ تبدیل علامت ہوں -

$$\text{جواب :- لا}^۱ - \text{لا}^۲ + \text{لا}^۳ - \text{لا}^۴ + \text{لا}^۵ - \text{لا}^۶ + \text{لا}^۷ - \text{لا}^۸ = ۱$$

(61)

۲ - مساوات

$$\text{لا}^۱ + \text{لا}^۲ + \text{لا}^۳ - \text{لا}^۴ - \text{لا}^۵ + \text{لا}^۶ + \text{لا}^۷ + \text{لا}^۸ = ۲$$

کی اصلوں کی علامتیں تبدیل کرو -

(غیر موجود رقموں کو صفر کے ساتھ مساوات میں داخل کرو) -

$$\text{جواب :- لا}^۱ + \text{لا}^۲ + \text{لا}^۳ - \text{لا}^۴ + \text{لا}^۵ - \text{لا}^۶ + \text{لا}^۷ - \text{لا}^۸ = ۲$$

۳ - دی ہوئی مقدار سے اصلوں کو ضرب دینا - اگر ایک

مساوات کو جسکی اصلیں عم<sup>۱</sup> عم<sup>۲</sup> عم<sup>۳</sup> ..... عم<sup>n</sup> ہیں دوسری ایسی مساوات میں



کو ایسی مساوات میں تحویل کر دیجی بڑی سے بڑی قوت والی رقم کا سر ایک ہو۔

ہم اصولوں کو ۳ سے ضرب دیتے ہیں۔

جواب :-  $0 = ۲۷ + ۱۸\lambda - ۱۲\lambda^۲ + ۳\lambda^۳$

۲ — مساوات

$$0 = ۱ - \lambda + \frac{۲}{۳}\lambda^۲ - \lambda^۳$$

سے کسری سر دور کرو۔

۱ اصولوں کو ۶ سے ضرب دو۔ جواب :-  $0 = ۲۱۶ - ۷۲\lambda + ۲۴\lambda^۲ - ۳\lambda^۳$

(82)

۳ — مساوات

$$0 = \frac{۱}{۱۰۸} - \frac{۷}{۱۸}\lambda + \frac{۲}{۳}\lambda^۲ - \frac{۱}{۱۰۸}\lambda^۳$$

سے کسری سر دور کرو۔  
ان کسروں کے نسب ناموں کے اجزائے ضربی پر غور کیا جائے تو معلوم ہو گا کہ  
ان کے ذواضعاف اقل سے بہت چھوٹا عدد کسروں کو دور کر نیکی لئے کافی ہے۔ اگر مطلوبہ  
ضرب دینے والا عدد م ہو تو تحویل شدہ مساوات لکھی جائیگی

$$0 = \frac{۱}{۲ \times ۳} - \frac{۷}{۲ \times ۳}\lambda + \frac{۲}{۳}\lambda^۲ - \frac{۱}{۲ \times ۳}\lambda^۳$$

اب یہ ظاہر ہے کہ اگر م کو ۶ کے مساوی لیا جائے تو ہر سر صحیح عدد بن جائیگا۔  
پس صرف ۶ سے ضرب دینا ہو گا۔

جواب :-  $0 = ۲ + ۱۲\lambda - ۱۵\lambda^۲ + ۲\lambda^۳$

۴ — مساوات

$$0 = \frac{۷}{۱۰۰۰} - \frac{۱۳}{۲۵}\lambda + \frac{۳}{۱۰}\lambda^۲ - \frac{۷}{۱۰۰۰}\lambda^۳$$

سے کسری سر دور کرو۔

اس قسم کی مثالوں میں طالب علم کو چاہئے کہ غیر موجود رقموں کو صفر سروں کے  
ساتھ مساوات میں داخل کرے۔ مطلوبہ ضارب ۱۰ ہے۔

جواب :-  $0 = ۷ + ۵۲۰\lambda - ۳۰\lambda^۲ + ۷\lambda^۳$





ابھی ہم نے جو اوپر ثابت کیا ہے اُس سے ظاہر ہے کہ اس جماعت سے متعلق مساوات شرائط ذیل کو پورا کرے گی۔

$\frac{b_1}{b_2} = \frac{b_1}{b_2}$ ،  $\frac{b_1}{b_2} = \frac{b_1}{b_2}$  وغیرہ  $\frac{b_1}{b_2} = \frac{b_1}{b_2}$ ،  $\frac{b_1}{b_2} = \frac{b_1}{b_2}$ ،  $\frac{b_1}{b_2} = \frac{b_1}{b_2}$ ۔  
 انہیں سے آخری شرط سے حاصل ہوگا  $b_1 = b_2$  یعنی  $b_1 = b_2 = 1$ ۔  
 اسلئے تنکانی مساواتوں کو دو جماعتوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔ ایک جماعت وہ  
 جس میں  $b_1 = 1$  اور دوسری وہ جس میں  $b_1 = 1$ ۔  
 (۱) پہلی صورت میں روابط ہونگے

$$b_1 = b_1 = b_2 = b_2 = \dots = b_1 = b_1$$

ان سے پہلی جماعت کی تنکانی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں جنہیں ابتدا اور آخر سے  
 لی ہوئی متناظر رقموں کے سرمقدا میں مساوی اور ہم علامت ہونگے۔

(۲) دوسری صورت میں یعنی جبکہ  $b_1 = 1$  روابط ہونگے

$$b_1 = b_1 = b_2 = b_2 = \dots = b_1 = b_1$$

ان سے دوسری جماعت کی تنکانی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں جنہیں ابتدا اور آخر سے  
 لی ہوئی متناظر رقموں کے سرمقدا میں مساوی مگر مختلف علامت ہونگے۔ یہاں  
 یہ بات یاد رہے کہ جب اس جماعت کی کسی مساوات کا درجہ جفت ہو مثلاً  
 $n = 2$  تو ایک شرط ہو جائیگی  $b_1 = b_2$  یعنی  $b_1 = b_2 = 1$ ۔ اس لئے دوسری  
 جماعت کی تنکانی مساوات میں جب کا درجہ جفت ہو درمیانی رقم نہیں ہوتی۔

اگر تنکانی مساوات کی ایک اصل عد ہو تو  $\frac{1}{2}$  بھی اسکی ایک اصل  
 ہونی چاہئے کیونکہ یہ استعمال شدہ مساوات کی اصل ہے اور استعمال شدہ مساوات  
 دی ہوئی مساوات کے مماثل ہے۔ پس تنکانی مساوات کی اصلیں زوجوں  
 عد  $\frac{1}{2}$ ،  $\frac{1}{2}$  وغیرہ میں واقع ہوتی ہیں۔ جب مساوات کا درجہ طاق ہو تو

ایک اصل ایسی ہونی چاہئے جو خود اپنی متکافی ہو اور مساوات کی شکل سے یہ ظاہر ہے کہ - ا یا + ایسی صورت میں ایک اصل ہوگی جو جب اسکے کہ مساوات پہلی جماعت سے یا دوسری جماعت سے متعلق ہو - دونوں صورتوں میں ہم معلومہ جزو ضربی (لا + ا یا لا - ا) سے تقسیم کر سکتے ہیں اور عمل تقسیم سے جفت درجہ کی متکافی مساوات حاصل ہوگی جو پہلی جماعت سے متعلق ہوگی دوسری جماعت کی جفت درجہ کی مساواتوں میں لا<sup>۱</sup> - ا جزو ضربی ہوگا کیونکہ مساوات کو شکل

$$لا^۱ - ا + ب لا (لا^۲ - ۱) + ..... =$$

میں لکھا جاسکتا ہے -  
لا<sup>۲</sup> - ا سے تقسیم کرنے سے اسکو بھی پہلی جماعت کی جفت درجہ کی متکافی مساوات میں تحویل کیا جاسکتا ہے - پس تمام متکافی مساواتوں کو پہلی جماعت کی جفت درجہ کی مساواتوں میں تحویل کیا جاسکتا ہے -  
اور اسلئے پہلی جماعت کی جفت درجہ کی مساوات کو معیاری مساوات قرار دیا جاسکتا ہے -

## مثالیں

۱ - وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں مساوات

$$لا^۲ - لا^۳ + لا^۴ + لا^۵ - لا^۶ = ۰$$

کی اصلوں کے متکافی ہوں -

جواب :- لا<sup>۲</sup> - لا<sup>۵</sup> - لا<sup>۴</sup> + لا<sup>۳</sup> - لا<sup>۶</sup> = ۰

$$۲ - لا^۱ + لا^۵ - لا^۶ + لا^۲ + لا^۳ - لا^۴ - لا^۵ = ۰$$

کو پہلی جماعت کی جفت درجہ کی مساوات میں تحویل کرو -

۳۳ - اصلوں کو بقدر ایک دی ہوئی مقدار کے گھٹانا یا بڑھانا -

اس قسم کے استحالة کیلئے ہم کثیر الارقام ف (لا) کے متغیر لا کو ما + ہ میں بدل دیتے ہیں۔ ما میں محصلہ مساوات کی ہر اصل دی ہوئی لا کی مساوات کی ہر اصل سے چھوٹی یا بڑی ہوگی بیوجب اسکے کہ ہ مثبت یا منفی ہو۔ محصلہ مساوات ہوگی (دیکھو دفعہ ۱۷)

$$ف (ہ) + ف (ہ) + ما + \frac{ف (ہ)}{۲ \times ۱} + ..... = ۰$$

یہاں ہم دیکھتے ہیں کہ مشتق تفاعلوں کو راست محبوب کر کے انہیں دی ہوئی مقدار ہ درج کرنا محنت طلب امر ہے۔ اسلئے ہم اس مساوات کو بنانیکا ایک آسان طریقہ بیان کرتے ہیں جو عملی مقاصد کیلئے زیادہ کار آمد و سہولت بخش ہے۔ فرض کرو کہ مجوزہ مساوات ہے

$$۱. لا + ۱. لا - ۱. لا + ۱. لا - ۱. لا + ..... + ۱. لا - ۱. لا + ۱. لا = ۰$$

(65)

اور فرض کرو کہ ما میں تحویل شدہ کثیر الارقام ہے

$$۱. ما + ۱. ما - ۱. ما + ۱. ما - ۱. ما + ..... + ۱. ما - ۱. ما + ۱. ما = ۰$$

اب چونکہ ما = لا - ہ اسلئے یہ کثیر الارقام

$$۱. (لا - ہ) + ۱. (لا - ہ) - ۱. (لا - ہ) + ..... + ۱. (لا - ہ) - ۱. (لا - ہ) + ۱. (لا - ہ) = ۰$$

کے مماثل ہے جس سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ اگر دئے ہوئے کثیر الارقام کو لا - ہ سے تقسیم کیا جائے تو باقی ۱. ہوگا اور خارج قسمت ہوگا

$$۱. (لا - ہ) + ۱. (لا - ہ) - ۱. (لا - ہ) + ..... + ۱. (لا - ہ) - ۱. (لا - ہ) + ۱. (لا - ہ) = ۰$$

اگر اسکو پھر لا - ہ سے تقسیم کیا جائے تو باقی ۱. ہوگا اور خارج قسمت ہوگا۔

$$۱. (لا - ہ) + ۱. (لا - ہ) - ۱. (لا - ہ) + ..... + ۱. (لا - ہ) - ۱. (لا - ہ) + ۱. (لا - ہ) = ۰$$

اس عمل کو جاری رکھ کر ہم معمولی حسابی اعمال کی تکرار سے (جو دفعہ ۸ میں بیان ہوئے ہیں) تحویل شدہ مساوات کے سروں  $ل_۱$ ،  $ل_۲$ ،  $ل_۳$  وغیرہ کی قیمتیں یکے بعد دیگرے معلوم کر سکتے ہیں۔ آخری سروں  $ل_۱$ ،  $ل_۲$  کے مساوی ہو گا۔ کسی آئندہ باب میں یہ معلوم ہو گا کہ عددی مساواتوں کو حل کر نیکاً بہترین عملی طریقہ صرف اس شکل کی توسیع ہے۔ ہر جز ذیل مثالوں میں استعمال کیا گیا ہے۔

## مثالیں

۱۔ وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں مساوات

$$ل_۱ - ۵ ل_۲ + ۴ ل_۳ - ۱۴ ل_۴ + ۱۱ ل_۵ = ۰$$

کی اصلوں سے بقدر ۴ کے گھٹی ہوئی ہوں۔

عمل حساب بہترین طریقہ پر ذیل سے ظاہر ہے

|      |      |     |     |   |
|------|------|-----|-----|---|
| ۱۱   | ۱۴ - | ۴   | ۵ - | ۱ |
| ۲۰ - | ۱۲   | ۴ - | ۴   |   |
| ۹ -  | ۵ -  | ۳   | ۱ - |   |
|      | ۶ -  | ۱۲  | ۴   |   |
|      | ۵۵   | ۱۵  | ۳   |   |
|      |      | ۲۸  | ۴   |   |
|      |      | ۴۳  | ۴   |   |
|      |      |     | ۱۱  |   |

یہاں دیئے ہوئے کثیرالارقام کو اول لا۔ ۴ سے تقسیم کیا گیا جس سے باقی

(۵۵)

۹ = (۱۱) اور خارج قسمت لا۔ لا + ۳ لا۔ ۵ حاصل ہوا (دیکھو دفعہ ۸)۔ اسکو پھر لا۔ ۴ سے تقسیم کیا گیا تو باقی ۵۵ = (۱۱) اور خارج قسمت لا + ۳ لا + ۱۵ حاصل ہوا۔

پھر تقسیم کرنے سے باقی ۳۳ (= ۱۲) اور خارج قسمت لا + ۷ اور اس کو تقسیم کرنے سے  
(۱) = ۱۱ اور لا = ۱۔ پس مطلوبہ استحالہ شدہ مساوات ہے

$$۰ = ۹ - لا + لا^۲ + لا^۳ + لا^۴ + لا^۵ + لا^۶ + لا^۷ + لا^۸ + لا^۹ + لا^{۱۰} + لا^{۱۱} + لا^{۱۲}$$

۲۔ وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں مساوات

$$۰ = لا + لا^۲ - لا^۳ + لا^۴ + لا^۵ + لا^۶ + لا^۷ + لا^۸ + لا^۹ + لا^{۱۰} + لا^{۱۱} + لا^{۱۲}$$

کی اصلوں سے بقدر ۳ کے گھٹی ہوئی ہوں۔

|     |     |     |    |    |    |
|-----|-----|-----|----|----|----|
| ۱۱  | ۰   | ۱ - | ۲  | ۰  | ۱  |
| ۳۳۲ | ۱۱۲ | ۳۹  | ۹  | ۳  |    |
| ۳۵۳ | ۱۱۲ | ۳۸  | ۱۳ | ۳  |    |
|     | ۳۹۲ | ۹۳  | ۱۸ | ۳  |    |
|     | ۵۰۷ | ۱۳۱ | ۳۱ | ۶  |    |
|     |     | ۱۷۲ | ۲۷ | ۳  |    |
|     |     | ۳۰۵ | ۵۸ | ۹  |    |
|     |     |     | ۳۶ | ۳  |    |
|     |     |     | ۹۲ | ۱۲ |    |
|     |     |     |    |    | ۱۵ |

اسلئے استحالہ شدہ مساوات ہے

$$۰ = ۳۵۳ + لا ۵۰۷ + لا^۲ ۳۰۵ + لا^۳ ۹۲ + لا^۴ ۱۵ + لا^۵ ۳ + لا^۶ ۹ + لا^۷ ۳ + لا^۸ ۱۲ + لا^۹ ۱۵ + لا^{۱۰} ۳ + لا^{۱۱} ۹ + لا^{۱۲} ۱۵$$

۳۔ وہ مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں مساوات

$$۰ = لا^۴ - لا^۵ + لا^۶ - لا^۷ + لا^۸ - لا^۹ + لا^{۱۰} - لا^{۱۱} + لا^{۱۲}$$

کی اصلوں سے بقدر ۲ کے زیادہ ہوں۔

اس عمل میں ضارب صریحاً ۲ ہے۔

$$جواب:- لا^۴ - لا^۵ + لا^۶ - لا^۷ + لا^۸ - لا^۹ + لا^{۱۰} - لا^{۱۱} + لا^{۱۲} = ۱۲۹ - لا + لا^۲ - لا^۳ + لا^۴ - لا^۵ + لا^۶ - لا^۷ + لا^۸ - لا^۹ + لا^{۱۰} - لا^{۱۱} + لا^{۱۲}$$

۴۔ مساوات

$$۰ = لا^۴ - لا^۵ + لا^۶ - لا^۷ + لا^۸ - لا^۹ + لا^{۱۰} - لا^{۱۱} + لا^{۱۲}$$

کی اصلوں کو بقدر ۷ کے بڑھاؤ۔  
جواب :-  $3^2 - 2^2 - 1^2 + 4^2 - 5^2 + 6^2 - 7^2 = 36 - 4 + 16 - 25 + 36 - 49 = 11$

۵۔ مساوات

$$5^2 - 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2 = 25 - 16 - 9 + 4 - 1 = 0$$

کو بقدر ۲۳ کے گھٹاؤ۔

یہاں بہتر یہ ہو گا کہ پہلے اصلوں کو بقدر ۲۰ کے گھٹایا جائے۔ پھر استعمال شروع مساوات کی اصلوں کو بقدر ۳ کے گھٹایا جائے۔ اس دو ہرے عمل کو ذیل میں واضح کیا گیا ہے جہاں ہر عمل کا اختتام شکستہ خط سے دکھایا گیا ہے۔

(87)

|       |      |     |    |   |
|-------|------|-----|----|---|
|       | ۷    | ۱۲  | ۱۳ | ۵ |
| ۳۴۵۶۰ | ۱۷۲۰ | ۱۰۰ |    |   |
| ۳۴۵۶۷ | ۱۷۲۸ | ۸۷  |    |   |
| ۱۹۱۲۲ | ۳۷۴۰ | ۱۰۰ |    |   |
| ۵۳۶۸۹ | ۵۴۶۸ | ۱۸۷ |    |   |
|       | ۹۰۶  | ۱۰۰ |    |   |
|       | ۶۳۷۴ | ۲۸۷ |    |   |
|       | ۹۵۱  | ۱۵  |    |   |
|       | ۷۳۲۵ | ۳۰۲ |    |   |
|       |      | ۱۵  |    |   |
|       |      | ۳۱۷ |    |   |
|       |      | ۱۵  |    |   |
|       |      | ۳۳۲ |    |   |

جواب :-  $5^2 - 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2 + 6^2 - 7^2 + 8^2 - 9^2 + 10^2 = 25 - 16 - 9 + 4 - 1 + 36 - 49 + 64 - 81 + 100 = 11$

۳۴۔ رقموں کا اخراج۔ دفعہ گذشتہ کے استعمال سے ایک

نائدہ یہ ہے کہ مساوات سے کسی مخصوص رقم کو خارج کیا جاسکتا ہے۔ ایسا کرنے

اس کے حل کرنے میں اکثر سہولت پیدا ہوتی ہے۔ مائی قوتوں میں استعمال شدہ مساوات کو ترتیب دینے سے حاصل ہوگا

$$! مائی + (ن ! مائی + ! مائی) + \frac{(ن-۱)! مائی}{۲ \times ۱} + ! مائی + (ن-۱)! مائی + ! مائی + \dots + ! مائی$$

اگر یہ ایسا ہو کہ مساوات ۱ ! مائی + ! مائی = ۰ کو پورا کرے تو استعمال شدہ مساوات میں دوسری رقم غائب ہوگی۔ اگر یہ ایسا ہو کہ وہ مساوات

$$\frac{(ن-۱)! مائی}{۲ \times ۱} + ! مائی + (ن-۱)! مائی + ! مائی = ۰$$

کی دو اصلوں میں سے کسی ایک کے مساوی ہو تو استعمال شدہ مساوات میں تیسری رقم غائب ہوگی۔ چوتھی رقم کا اخراج ۰ کے کعبی کے حل پر منحصر ہوگا۔ آخری رقم کو خارج کرنے کے لئے مساوات ۱ (۰) = ۰ کو حل کرنا ہوگا جسکے معنی ابتدائی مساوات کو حل کرنے کے ہیں۔

## مثالیں

۱۔ مساوات

$$! مائی - ! مائی + ! مائی - ! مائی = ۰$$

کو ایسی مساوات میں تحویل کرو جسکی دوسری رقم موجود نہ ہو۔

$$ن ! مائی + ! مائی = ۰$$

اصلوں کو بقدر ۲ کے گھٹاؤ۔

$$! مائی - ! مائی + ! مائی - ! مائی = ۰$$

۲۔ مساوات

$$! مائی + ! مائی + ! مائی - ! مائی = ۰$$

کو ایسی مساوات میں تحویل کرو جس میں دوسری رقم موجود نہ ہو۔

$$! مائی - ! مائی + ! مائی + ! مائی - ! مائی = ۰$$



### ۳۔ مساوات

$$لا^۲ - لا^۳ - لا^۱۸ - لا^۲۳ = ۲ + لا^۳ = ۰$$

کو ایسی مساوات میں تحویل کر دیجیں تیسری رقم موجود نہ ہو۔  
۴ کے لئے مساوات درجہ دوم ہوگی

$$۶ لا^۲ - لا^۱۲ - لا^۱۸ = ۰ \text{ جس سے } لا^۳ = لا^۳ - لا^۳ = ۰$$

اس لئے دی ہوئی مساوات کو تحویل کرنیکے دو طریقے ہیں۔  
۱۔ اصلوں کو بقدر ۳ کے گھٹانے سے حاصل ہوگا

$$(۱) لا^۲ + لا^۸ - لا^۱۱۱ - لا^۱۹۶ = ۰$$

۱۔ اصلوں کو بقدر ایک کے بڑھانے سے حاصل ہوگا

$$(۲) لا^۲ - لا^۸ + لا^۱۱۱ - لا^۱۹۶ = ۰$$

### ۳۵۔ شنائی سر۔ بہت سے جبری اعمال میں کثیر الارقام ف (لا)

کو شکل ذیل میں لکھنا سہولت بخش ہوتا ہے:-

$$لا^۱ + لا^۲ + لا^۳ + \dots + لا^۱۸ + لا^۲۳ = \frac{لا^۱(۱-لا^{۱۸})}{۱-لا} + \dots + \frac{لا^۱۸(۱-لا^{۲۳})}{۱-لا} + لا^۲۳$$

$$+ لا^۱۸ + لا^۱۱۱ + لا^۱۹۶$$

جس میں ہر رقم کا سر حرفی سر کے علاوہ ایک عددی سر پر مشتمل ہے جو (لا+۱) کے

کے پھیلاؤ کی متناظر رقم کے سر کے مساوی ہے جب اسے مسئلہ شنائی سے

پھیلا یا جائے۔ اس طریقہ پر لکھی ہوئی مساواتوں کی مثالیں دفعہ ۲ کے

۱۳ دیں اور ۱۶ دیں سوالات میں دی گئی ہیں۔ یہ شکل ایسی ہے جس میں ہر کثیر الارقام

کو فوراً تحویل کیا جاسکتا ہے۔

اب ہم ترقیم ذیل اختیار کرتے ہیں:-

$$ع = لا^۱ + لا^۲ + لا^۳ + \dots + لا^۱۸ + لا^۲۳ = \frac{لا^۱(۱-لا^{۱۸})}{۱-لا} + \dots + \frac{لا^۱۸(۱-لا^{۲۳})}{۱-لا} + لا^۲۳$$

$$+ لا^۱۸ + لا^۱۱۱ + لا^۱۹۶$$

یہاں  $E$  لاحقہ  $n$  کے ساتھ  $n$  ویں درجہ کے کثیرالارقام کو تعبیر کرتا ہے جو ثنائی سروں کے ساتھ لکھا گیا ہو۔

69)

اس لئے  $n$  کو  $n-1$ ،  $n-2$  وغیرہ میں بدلنے سے

$$E_{n-1} = 1 \cdot 1^{n-1} + (n-1) \cdot 1^{n-2} + \dots + (n-1) \cdot 1 + 1 = 1$$

$$E_{n-2} = 1 \cdot 1^{n-2} + (n-2) \cdot 1^{n-3} + \dots + (n-2) \cdot 1 + 1 = 1$$

.....

$$E_3 = 1 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 = 8$$

$$E_2 = 1 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 4$$

$$E_1 = 1 \cdot 1 + 1 = 2$$

$$E_0 = 1$$

ثنائی شکل میں رکھنے سے ایک فائدہ یہ ہے کہ مشتق تفاعل کو فوراً لکھا جاسکتا ہے۔ چنانچہ  $E_n$  کا پہلا مشتق تفاعل صریحاً ہے

$$n \cdot \{ 1 \cdot 1^{n-1} + (n-1) \cdot 1^{n-2} + \dots + (n-1) \cdot 1 + 1 \} = \frac{(n-1)(n-2)}{2 \times 1} + \dots + 1$$

یعنی  $E_{n-1}$ ۔ اس لئے اس طور پر تعبیر شدہ کثیرالارقام کا پہلا مشتق تفاعل  $E$  کے لاحقہ پر اس قانون کو استعمال کر کے لکھا جاسکتا ہے جو دفعہ ۲ میں متغیر کے قوت نما کے لحاظ سے بیان کیا گیا ہے۔ مثلاً  $E_3$  کا پہلا مشتق تفاعل اس کو  $E_2$  سے ضرب دیکر اس کے لاحقہ کو بقدر ایک کے گھٹانے سے بنایا جاسکتا ہے۔ اس لئے یہ مشتق تفاعل  $E_2$  ہے جسکی تصدیق طالب علم آسانی سے کر سکتا ہے۔

اب ہم یہ ثابت کریں گے کہ کثیرالارقام  $E_n$  یعنی

$$1 \cdot 1^n + n \cdot 1^{n-1} + \dots + \frac{(n-1)(n-2)}{2 \times 1} + \dots + 1$$

میں لا کی بجائے  $ما + ہ$  درج کرنے سے اسکو شکل

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

میں تحویل کیا جاسکتا ہے جہاں

$$1 + 2 + 3 + \dots + n$$

وہ تفاعل ہیں جو

$$1 + 2 + 3 + \dots + n$$

میں لا کی بجائے  $ہ$  درج کرنے سے حاصل ہوتے ہیں یعنی

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

اگر  $(ہ)$  کے مشتق تفاعلوں کو لاکھوں سے تعبیر کیا جائے جیسا کہ

(70) دفعہ ۶ میں بتایا گیا ہے تو ہم تحویل شدہ تفاعل یعنی  $ف (ما + ہ)$  کو شکل ذیل میں لکھ سکتے ہیں:۔

$$ف (ہ) + ف (ما + ہ) + \dots + \frac{ف (ہ)}{2 \times 1} + \dots + \frac{ف (ہ)}{n \times \dots \times 2 \times 1}$$

عن میں لا کی بجائے  $ہ$  درج کیا جائے تو  $ف (ہ)$  حاصل ہوتا ہے اسلئے وہ  $ن$  کے مساوی ہے۔ اس کا پہلا مشتق قانون متدکرہ بالا کی بموجب

$ن$  ہے۔ پھر اسکا پہلا مشتق  $ن (ن - ۱)$  ہے اور علیٰ ہذا۔

ان اندراجات کو عمل میں لانے سے نتیجہ بالا حاصل ہوتا ہے جس سے ہم استحصال شدہ مساوات کو بغیر کسی حسابی عمل کے فوراً لکھ سکتے ہیں۔



جواب :-  $۱۰۱ - ۱۰۲ = ۱$

۴ — مساوات

$$۱۰۱ + ۱۰۲ + ۱۰۳ + ۱۰۴ = ۱۰۵$$

سے دوسری رقم خارج کر کے اسکو حل کرو۔  
ایک ہی اندراج سے تیسری رقم بھی خارج ہوگی اور حاصل ہوگا  
 $۱۰۱ - ۱۰۲ = ۱$

(۲۶) مطلوبہ اصلیں اس مساوات کی اصلوں میں سے ۲ تفریق کرنے سے حاصل ہونگی۔

۵ — وہ شرط معلوم کرو کہ مساوات عن = کی دوسری اور چوتھی رقمیں  
ایک ہی اندراج سے خارج ہو سکیں۔

یہاں ۱۰۱ کی ایک ہی قیمت کے لئے ۱۰۱ اور ۱۰۲ دونوں کو معدوم  
ہو جانا چاہیئے۔ اسلئے مساواتوں

$$۱۰۱ + ۱۰۲ = ۱۰۱ + ۱۰۲ + ۱۰۳ + ۱۰۴ + ۱۰۵ = ۱۰۶$$

سے ۱۰۱ کو مٹا کر دیا جائے تو مطلوبہ شرط ہوگی

$$۱۰۱ - ۱۰۲ = ۱۰۱ + ۱۰۲ + ۱۰۳ + ۱۰۴ + ۱۰۵ = ۱۰۶$$

نوٹ :- مساوات درجہ چہارم کے سرول کے درمیان جب یہ شرط پوری  
ہو تو اسکو مساوات درجہ دوم میں تحویل کیا جاسکتا ہے کیونکہ جب دوسری رقم  
خارج کر دی جاتی ہے تو محصلہ مساوات میں درجہ دوم کی مساوات ہوگی اور  
ماکی قیمتوں سے لاکھ قیمتیں حاصل ہونگی۔

۶ — مساوات

$$۱۰۱ + ۱۰۲ + ۱۰۳ + ۱۰۴ + ۱۰۵ = ۱۰۶$$

کی دوسری رقم خارج کر کے اسکو حل کرو۔

مابین مساوات ہوگی

$$۱۰۱ - ۱۰۲ = ۱$$

۷ — اسی طرح مساوات

$$۱۰۱ + ۱۰۲ + ۱۰۳ + ۱۰۴ + ۱۰۵ = ۱۰۶$$





استحالہ مساوات کے ذریعہ ہم ابتدائی کبھی کی اصولوں کے متشاکل تفاعل (78)

(۲۷-۲۸-۲۹) (۳۰-۳۱-۳۲) (۳۳-۳۴-۳۵) (۳۶-۳۷-۳۸) (۳۹-۴۰-۴۱) (۴۲-۴۳-۴۴) (۴۵-۴۶-۴۷) (۴۸-۴۹-۵۰) (۵۱-۵۲-۵۳) (۵۴-۵۵-۵۶) (۵۷-۵۸-۵۹) (۶۰-۶۱-۶۲) (۶۳-۶۴-۶۵) (۶۶-۶۷-۶۸) (۶۹-۷۰-۷۱) (۷۲-۷۳-۷۴) (۷۵-۷۶-۷۷) (۷۸-۷۹-۸۰) (۸۱-۸۲-۸۳) (۸۴-۸۵-۸۶) (۸۷-۸۸-۸۹) (۹۰-۹۱-۹۲) (۹۳-۹۴-۹۵) (۹۶-۹۷-۹۸) (۹۹-۱۰۰-۱۰۱) (۱۰۲-۱۰۳-۱۰۴) (۱۰۵-۱۰۶-۱۰۷) (۱۰۸-۱۰۹-۱۱۰) (۱۱۱-۱۱۲-۱۱۳) (۱۱۴-۱۱۵-۱۱۶) (۱۱۷-۱۱۸-۱۱۹) (۱۲۰-۱۲۱-۱۲۲) (۱۲۳-۱۲۴-۱۲۵) (۱۲۶-۱۲۷-۱۲۸) (۱۲۹-۱۳۰-۱۳۱) (۱۳۲-۱۳۳-۱۳۴) (۱۳۵-۱۳۶-۱۳۷) (۱۳۸-۱۳۹-۱۴۰) (۱۴۱-۱۴۲-۱۴۳) (۱۴۴-۱۴۵-۱۴۶) (۱۴۷-۱۴۸-۱۴۹) (۱۵۰-۱۵۱-۱۵۲) (۱۵۳-۱۵۴-۱۵۵) (۱۵۶-۱۵۷-۱۵۸) (۱۵۹-۱۶۰-۱۶۱) (۱۶۲-۱۶۳-۱۶۴) (۱۶۵-۱۶۶-۱۶۷) (۱۶۸-۱۶۹-۱۷۰) (۱۷۱-۱۷۲-۱۷۳) (۱۷۴-۱۷۵-۱۷۶) (۱۷۷-۱۷۸-۱۷۹) (۱۸۰-۱۸۱-۱۸۲) (۱۸۳-۱۸۴-۱۸۵) (۱۸۶-۱۸۷-۱۸۸) (۱۸۹-۱۹۰-۱۹۱) (۱۹۳-۱۹۴-۱۹۵) (۱۹۶-۱۹۷-۱۹۸) (۱۹۹-۲۰۰-۲۰۱) (۲۰۲-۲۰۳-۲۰۴) (۲۰۵-۲۰۶-۲۰۷) (۲۰۸-۲۰۹-۲۱۰) (۲۱۱-۲۱۲-۲۱۳) (۲۱۴-۲۱۵-۲۱۶) (۲۱۷-۲۱۸-۲۱۹) (۲۲۰-۲۲۱-۲۲۲) (۲۲۳-۲۲۴-۲۲۵) (۲۲۶-۲۲۷-۲۲۸) (۲۲۹-۲۳۰-۲۳۱) (۲۳۲-۲۳۳-۲۳۴) (۲۳۵-۲۳۶-۲۳۷) (۲۳۸-۲۳۹-۲۴۰) (۲۴۱-۲۴۲-۲۴۳) (۲۴۴-۲۴۵-۲۴۶) (۲۴۷-۲۴۸-۲۴۹) (۲۵۰-۲۵۱-۲۵۲) (۲۵۳-۲۵۴-۲۵۵) (۲۵۶-۲۵۷-۲۵۸) (۲۵۹-۲۶۰-۲۶۱) (۲۶۲-۲۶۳-۲۶۴) (۲۶۵-۲۶۶-۲۶۷) (۲۶۸-۲۶۹-۲۷۰) (۲۷۱-۲۷۲-۲۷۳) (۲۷۴-۲۷۵-۲۷۶) (۲۷۷-۲۷۸-۲۷۹) (۲۸۰-۲۸۱-۲۸۲) (۲۸۳-۲۸۴-۲۸۵) (۲۸۶-۲۸۷-۲۸۸) (۲۸۹-۲۹۰-۲۹۱) (۲۹۳-۲۹۴-۲۹۵) (۲۹۶-۲۹۷-۲۹۸) (۲۹۹-۳۰۰-۳۰۱) (۳۰۲-۳۰۳-۳۰۴) (۳۰۵-۳۰۶-۳۰۷) (۳۰۸-۳۰۹-۳۱۰) (۳۱۱-۳۱۲-۳۱۳) (۳۱۴-۳۱۵-۳۱۶) (۳۱۷-۳۱۸-۳۱۹) (۳۲۰-۳۲۱-۳۲۲) (۳۲۳-۳۲۴-۳۲۵) (۳۲۶-۳۲۷-۳۲۸) (۳۲۹-۳۳۰-۳۳۱) (۳۳۲-۳۳۳-۳۳۴) (۳۳۵-۳۳۶-۳۳۷) (۳۳۸-۳۳۹-۳۴۰) (۳۴۱-۳۴۲-۳۴۳) (۳۴۴-۳۴۵-۳۴۶) (۳۴۷-۳۴۸-۳۴۹) (۳۵۰-۳۵۱-۳۵۲) (۳۵۳-۳۵۴-۳۵۵) (۳۵۶-۳۵۷-۳۵۸) (۳۵۹-۳۶۰-۳۶۱) (۳۶۲-۳۶۳-۳۶۴) (۳۶۵-۳۶۶-۳۶۷) (۳۶۸-۳۶۹-۳۷۰) (۳۷۱-۳۷۲-۳۷۳) (۳۷۴-۳۷۵-۳۷۶) (۳۷۷-۳۷۸-۳۷۹) (۳۸۰-۳۸۱-۳۸۲) (۳۸۳-۳۸۴-۳۸۵) (۳۸۶-۳۸۷-۳۸۸) (۳۸۹-۳۹۰-۳۹۱) (۳۹۳-۳۹۴-۳۹۵) (۳۹۶-۳۹۷-۳۹۸) (۳۹۹-۴۰۰-۴۰۱) (۴۰۲-۴۰۳-۴۰۴) (۴۰۵-۴۰۶-۴۰۷) (۴۰۸-۴۰۹-۴۱۰) (۴۱۱-۴۱۲-۴۱۳) (۴۱۴-۴۱۵-۴۱۶) (۴۱۷-۴۱۸-۴۱۹) (۴۲۰-۴۲۱-۴۲۲) (۴۲۳-۴۲۴-۴۲۵) (۴۲۶-۴۲۷-۴۲۸) (۴۲۹-۴۳۰-۴۳۱) (۴۳۲-۴۳۳-۴۳۴) (۴۳۵-۴۳۶-۴۳۷) (۴۳۸-۴۳۹-۴۴۰) (۴۴۱-۴۴۲-۴۴۳) (۴۴۴-۴۴۵-۴۴۶) (۴۴۷-۴۴۸-۴۴۹) (۴۵۰-۴۵۱-۴۵۲) (۴۵۳-۴۵۴-۴۵۵) (۴۵۶-۴۵۷-۴۵۸) (۴۵۹-۴۶۰-۴۶۱) (۴۶۲-۴۶۳-۴۶۴) (۴۶۵-۴۶۶-۴۶۷) (۴۶۸-۴۶۹-۴۷۰) (۴۷۱-۴۷۲-۴۷۳) (۴۷۴-۴۷۵-۴۷۶) (۴۷۷-۴۷۸-۴۷۹) (۴۸۰-۴۸۱-۴۸۲) (۴۸۳-۴۸۴-۴۸۵) (۴۸۶-۴۸۷-۴۸۸) (۴۸۹-۴۹۰-۴۹۱) (۴۹۳-۴۹۴-۴۹۵) (۴۹۶-۴۹۷-۴۹۸) (۴۹۹-۵۰۰-۵۰۱) (۵۰۲-۵۰۳-۵۰۴) (۵۰۵-۵۰۶-۵۰۷) (۵۰۸-۵۰۹-۵۱۰) (۵۱۱-۵۱۲-۵۱۳) (۵۱۴-۵۱۵-۵۱۶) (۵۱۷-۵۱۸-۵۱۹) (۵۲۰-۵۲۱-۵۲۲) (۵۲۳-۵۲۴-۵۲۵) (۵۲۶-۵۲۷-۵۲۸) (۵۲۹-۵۳۰-۵۳۱) (۵۳۲-۵۳۳-۵۳۴) (۵۳۵-۵۳۶-۵۳۷) (۵۳۸-۵۳۹-۵۴۰) (۵۴۱-۵۴۲-۵۴۳) (۵۴۴-۵۴۵-۵۴۶) (۵۴۷-۵۴۸-۵۴۹) (۵۵۰-۵۵۱-۵۵۲) (۵۵۳-۵۵۴-۵۵۵) (۵۵۶-۵۵۷-۵۵۸) (۵۵۹-۵۶۰-۵۶۱) (۵۶۲-۵۶۳-۵۶۴) (۵۶۵-۵۶۶-۵۶۷) (۵۶۸-۵۶۹-۵۷۰) (۵۷۱-۵۷۲-۵۷۳) (۵۷۴-۵۷۵-۵۷۶) (۵۷۷-۵۷۸-۵۷۹) (۵۸۰-۵۸۱-۵۸۲) (۵۸۳-۵۸۴-۵۸۵) (۵۸۶-۵۸۷-۵۸۸) (۵۸۹-۵۹۰-۵۹۱) (۵۹۳-۵۹۴-۵۹۵) (۵۹۶-۵۹۷-۵۹۸) (۵۹۹-۶۰۰-۶۰۱) (۶۰۲-۶۰۳-۶۰۴) (۶۰۵-۶۰۶-۶۰۷) (۶۰۸-۶۰۹-۶

اس سلسلہ میں عام مساوات کے متعلق ہم ایک اہم اصول بیان کرینگے۔ وہ یہ ہے کہ اصولوں 'عہ'، 'بہ'، 'جہ'، 'ضہ' وغیرہ کا کوئی تشاگل تفاعل جو صرف انکے فرقوں کا تفاعل ہو ان سروں کے تفاعلوں کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے جو استحالہ شدہ مساوات میں جس دوسری رقوم موجود نہ ہو واضح ہو  
ہیں۔ یہ بات ظاہر ہے کیونکہ استحالہ شدہ مساوات کی کوئی دو اصولوں 'عہ'، 'بہ' کا فرق ابتدائی مساوات کی اصولوں 'عہ'، 'بہ' کے فرق کے مساوی ہے اور اصولوں 'عہ'، 'بہ'، 'جہ'، 'ضہ' وغیرہ کا کوئی تشاگل تفاعل استحالہ شدہ مساوات کے سرورچی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً گہ کی صورت میں اصولوں کے تمام تشاگل تفاعل جنہیں صرف اصولوں کے فرق داخل ہوں اور 'گ' کے تفاعلوں کی رقوم میں بیان کئے جاسکتے ہیں۔ اس اصول کی مثالیں دفعہ ۲ کی مثالوں میں ملینگی۔

۳۷۔ چار درجہ۔ اِس صورت میں استحالہ شدہ مساوات دوسری رقم کے بغیر حسب ذیل ہو گی۔

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{2} + \frac{1}{2} \sqrt{2} + \frac{1}{2} \sqrt{2} + \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

جہاں ہم اور ہم کی قیمتیں وہی ہیں جو دفعہ گذشتہ میں دی گئی ہیں اور جہاں ہم مساوات





اس مساوات کی اصلوں کو  $\lambda$  سے ضرب دیا جائے جیسا کہ دفعہ ۳۲ کے کعبی کی صورت میں کیا گیا ہے تو

$$y^3 + 6y^2 + y^2 + 4y + 3y - 3 = 0 \quad (2)$$

چار درجہ کا جبری حل دریافت کرنے میں اس کی یہ شکل آسانی پیدا کرتی ہے اس میں متغیر وہی ہے جو کعبی کی صورت میں تھا یعنی  $\lambda + \lambda$  کیونکہ ابتدائی چار درجہ تفاعل کو  $\lambda$  سے ضرب دیا جائے تو وہ درحقیقت

$$(\lambda + \lambda + \lambda) + 6(\lambda + \lambda + \lambda) + 4(\lambda + \lambda + \lambda) + 3(\lambda + \lambda + \lambda) - 3 = 0$$

کے حامل ہوتا ہے۔  
ابتدائی چار درجہ مساوات کی اصلوں کے کسی متشکل تفاعل کو جو صرف ان کے فرقوں سے بنا ہو  $\lambda$ ،  $h$ ،  $g$  اور  $e$  کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے۔

اگر ابتدائی مساوات کی اصلیں  $e$ ،  $y$ ،  $h$ ،  $g$ ،  $e$  ہوں تو یہ آسانی معلوم کیا جاسکتا ہے کہ استحالہ شدہ مساوات (۱) کی اصلیں ہیں

$$\frac{1}{p} (3e - y - h - g) = \frac{1}{p} (3e - y - h - g) = \frac{1}{p} (3e - y - h - g) = \frac{1}{p} (3e - y - h - g)$$

$$\frac{1}{p} (3e - y - h - g) = \frac{1}{p} (3e - y - h - g) = \frac{1}{p} (3e - y - h - g) = \frac{1}{p} (3e - y - h - g)$$

$$(75) \quad \text{تین تین کے حامل ضربوں کا مجموعہ} = \frac{1}{p} (3e - y - h - g) \text{، اور ان سب کے مسلسل}$$

حاصل ضرب کے لئے مساوات ہے

$$\frac{1}{p} (3e - y - h - g) = \frac{1}{p} (3e - y - h - g) = \frac{1}{p} (3e - y - h - g) = \frac{1}{p} (3e - y - h - g)$$

$$256 = (3e - y - h - g)$$

سروں کا ایک اور تفاعل ہے جو چار درجہ کی بحث میں بہت اہم رکھتا ہے اور جیسے ہم اب بیان کریں گے۔ یہ وہ تفاعل ہے جس کا ذکر دفعہ ۲۴ مثال ۱ میں ہو چکا ہے یعنی

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24}$$

اسکو ہم جے سے تعبیر کریں گے۔ جس مثال کا اوپر حوالہ دیا گیا ہے اُس سے ظاہر ہے کہ یہ تفاعل اصولوں کے فرقوں کا تفاعل ہے۔ اس لئے اسے 'لڑھک' اور ع کی رقوم میں بیان ہو جانا چاہیے اور فی الحقیقت ہمیں متاثرہ ملتی ہے

اُجے = اُھ ع۔ گ۔ ۲ھ

جسکی تصدیق طالب علم یہ آسانی کر سکتا ہے۔

یا اس ربط کو اس طریقہ سے بھی اخذ کیا جاسکتا ہے :- جب سرورِ اہلِ اہلِ  
 وغیرہ کا کوئی تفاعل اصلوں کے فرقوں کے تفاعل کی صورت میں بیان  
 ہو سکے تو سرور کا ایسا تفاعل اس استحالة سے غیر متغیر رہیگا جو مساوات سے  
 دوسری رقم کو خارج کر دیتا ہے۔ پس اسکی قیمت غیر متغیر رہتی ہے جب ہم  
 اہل کو صفر میں، اہل کو اہل میں، اہل کو اہل میں وغیرہ بدلتے ہیں۔ پس

[illegible]

اس میں لہ، لہ، لہ کی بجائے انکی قیمتیں ھ، گ، ع کی رقوم میں  
درج کرنے سے ہم یہ آسانی متذکرہ بالا متاثر نہ حاصل کر لیتے ہیں جس کو  
عام طور پر شکل ۳

میں لکھا جائیگا۔

۳۸۔ ہم رسم ( Homographic ) استحالہ۔ کسی کثیر الارقام کا

وہ استحالہ جس پر دفعہ ۳۳ میں غور کیا گیا ہے حسب ذیل استحالہ کی ایک خاص صورت ہے جس میں لائے متغیر مائے ساتھ ربط

$$\frac{L + L}{L + L} = 1$$

رکھتا ہے۔  
اگر  $لہ = اہ = ہلہ = بۃ = اتوا = لا$ ۔  $ھ$  جیسا کہ دفعہ ۳۳ میں  
فرض کیا گیا تھا۔  $لا$  کو  $ما$  کی رقوم میں حل کریں تو

$$لا = \frac{مہ - مہ}{لہ - لہ}$$

(76) اس قیمت کو دی ہوئی مساوات میں  $لا$  کی بجائے  $ھ$  کیا جاسکتا ہے  
اور اس طرح  $ما$  میں  $ن$  ویں درجہ کی ایک مساوات حاصل کیجاسکتی ہے۔  
فرض کرو کہ ابتدائی مساوات کی اصلیں  $عہ$ ،  $یہ$ ،  $جہ$ ،  $ضہ$  وغیرہ ہیں  
اور انکے جواب میں استحالہ شدہ مساوات کی اصلیں  $عہ$ ،  $یہ$ ،  $جہ$ ،  $ضہ$  وغیرہ ہیں تو  
مساواتوں

$$عہ = \frac{لہ + عہ}{لہ + مہ}، یہ = \frac{لہ + یہ}{لہ + مہ}، وغیرہ$$

سے ربط

$$عہ - یہ = \frac{(لہ - مہ)(عہ - یہ)}{(لہ + عہ)(لہ + یہ)}$$

یہ آسانی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ علیٰ ہذا اصولوں کے کسی دوسرے زوج  
کیلئے۔ اگر ہم ابتدائی مساوات کی چار اصلیں اور ان کے جواب میں استحالہ شدہ  
مساوات کی چار اصلیں لیں تو ربط ملیگا

$$\frac{(عہ - یہ)(جہ - ضہ)}{(عہ + جہ)(یہ + ضہ)} = \frac{(عہ - جہ)(یہ - ضہ)}{(عہ + ضہ)(یہ + جہ)}$$

پس اگر مجوزہ مساوات کی اصلیں ان فاصلوں کو تعبیر کریں جو ایک خط  
مستقیم پر کے چند نقطوں اور اسی خط پر کے ایک ثابت میدان کے درمیان  
ہیں تو استحالہ شدہ مساوات کی اصلیں نقطوں کے ایک متناظر نظام کے  
فاصلوں کو تعبیر کریں گی اور ان دونوں نظاموں میں یہ ربط ہوگا کہ ایک  
نظام کے کسی چار کی ”غیر موسیقی نسبت“ وہی ہوگی جو دوسرے نظام میں

انکے چار مزدوروں کی ہے۔ اسی خاصیت کی بنا پر ہم اس استحالہ کو ہم رحم استحالہ کہیں گے۔

یہ بات یاد رہے کہ زیر بحث استحالہ جس میں متغیروں لا اور ما میں

۱ لا + ب لا + ج ما + ۵ = ۰ کی شکل کا ربط ہے استحالہ کی عام سے عام شکل ہے جس سے کسی متغیر کی ایک قیمت کے جواب میں دوسرے متغیر کی ایک اور صرف ایک قیمت حاصل ہوتی ہے۔

۳۹۔ متشاکل تفاعلوں کے ذریعہ استحالہ۔ فرض کرو کہ ایک

مساوات کو ایک دوسری مساوات میں تحویل کرنا مطہ ہے جسکی اصلیں مجوزہ مساوات کی اصلوں کے دئے ہوئے منطق تہ ہیں ہوں۔ فرض کرو کہ دیا ہوا تفاعل (عہ، بہ، جہ، ..... ) ہے جہاں فہ میں ہم اصلیں داخل ہو سکتی ہیں یا اصلوں کی کوئی کسی تعداد۔ ہم اصلوں کے تمام ممکن اجتماع بہ طرز فہ (عہ بہ جہ) فہ (عہ بہ ضہ) وغیرہ بناتے ہیں اور اتحالی شدہ مساوات کو شکل

(۷۷)

۱ ما۔ فہ (عہ بہ جہ ..... ) { ۱ ما۔ فہ (عہ بہ ضہ ..... ) } = ..... میں لکھتے ہیں۔

جب اس حاصل ضرب کو پھیلا یا جاتا ہے تو ما کے متواتر سر دی ہوئی مساوات کی اصلوں عہ، بہ، جہ، وغیرہ کے متشاکل تفاعل ہونگے اور اسلئے اس مساوات کے سروں کی رقوم میں بیان ہو سکیں گے۔

مثالیں

۱ — لا + ف لا + ق لا + ر = ۰ کی اصلیں عہ، بہ، جہ ہیں۔ وہ مساوات معلوم کر جسکی اصلیں عہ، بہ، جہ ہیں۔ فرض کرو کہ استحالہ شدہ مساوات ہے

$$م^۲ + ف + م^۱ ق + م + س = .$$

$$تب - ف = ع^۲ + ب^۲ + ج^۲ ق = ع^۲ ب^۲ - س = ع^۲ ب^۲ ج^۲$$

اب دی ہوئی مساوات کی اصلوں کے متشاکل تفسیروں  
ع^۲ ع^۲ ب^۲ ع^۲ ب^۲ ج^۲ کو معلوم کرنا ہے۔ ہم یہ آسانی حاصل کرتے ہیں

$$ع^۲ = ف - ع^۲ ق = ع^۲ ب^۲ - س - ف - ع^۲ ب^۲ ج^۲ = ر$$

اسلئے استحالہ شدہ مساوات ہوگی

$$م^۲ - (ف - ع^۲ ق) + م^۱ (ق - ع^۲ ف) + م - ر = .$$

۲۔ اسی صورت میں وہ مساوات معلوم کر دجکی اصلیں ع^۳ ب^۳ ج^۳ ہوں

$$جواب :- م^۲ + (ف - ع^۲ ق) + م^۱ (ق - ع^۲ ف) + م - ر = .$$

$$+ ر = .$$

۳۔ اگر مساوات

$$م^۲ + ف + م^۱ ق + م + س = .$$

کی اصلیں ع^۳ ب^۳ ج^۳ ہوں تو ایسی مساوات بنا دجکی اصلیں ع^۳ ب^۳ ج^۳ ہوں

فرض کر دو کہ استحالہ شدہ مساوات ہے

$$تب - ف = ع^۲ ق = ع^۲ ب^۲ - س = ع^۲ ب^۲ ج^۲$$

$$س = ع^۲ ب^۲ ج^۲$$

دفعہ ۲ کی مثالوں ۸، ۷ سے مقابلہ کر دو۔

$$جواب :- م^۲ - (ف - ع^۲ ق) + م^۱ (ق - ع^۲ ف) + م - ر = .$$

$$+ س = .$$

۴۔ اگر  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

کی اصلیں  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$  ہوں تو وہ مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$  نہ بنی ہوں۔ دیکھو دفعہ ۲، مثال ۱۔

جواب:۔  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

۵۔ اگر مثال ۴ کے محصلہ کبھی کی اصلوں کو  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$  سے ضرب دیا جائے اور پھر دوسری رقم کو خارج کیا جائے تو ثابت کر دو کہ استحالہ شدہ مساوات ہے۔

ی۔  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

۶۔ وہ مساوات بنانا جسکی اصلیں دی ہوئی مساوات کی اصلوں کی کوئی قوتیں ہوں۔

گزشتہ دفعہ میں بیان کئے ہوئے متشاکل تفاضلوں کے طریقہ سے یہ استحالہ اکثر محنت طلب ہوتا ہے۔ اس سے زیادہ آسان طریقہ جمعیں صرف عمل ضرب کو دخل ہے استعمال کیا جاسکتا ہے۔ لیکن اس کا انحصار ثنائی مساوات  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$  کے حل کے علم پر ہے جس پر اب اسنڈہ میں بحث کی جائے گی۔ عام طریقہ عمل اشلہ ذیل کی مثالوں سے کافی طور پر واضح ہو جائیگا جہاں اس طریقہ کو دوسرے اور تیسرے درجہ کی مساواتوں پر استعمال کیا گیا ہے۔

### مثالیں

۱۔ وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں مساوات

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

کی اصلوں کے مربع ہوں۔

اس استحالة کو عمل میں لانے کے لئے متماثلہ

$$\text{لا}^{\text{ن}} \text{ب}^{\text{ا}} \text{لا}^{\text{ن}} + \text{ب}^{\text{ا}} \text{لا}^{\text{ن}} - \dots + \text{ب}^{\text{ا}} \text{لا}^{\text{ن}} = (\text{لا} - \text{ع}) (\text{لا} - \text{ع}) \dots (\text{لا} - \text{ع})$$

میں لا کی بجائے۔ لا درج کر دو تو ہمیں حاصل ہوگا (دفعہ ۳۰ کی طرح)

$$\text{لا}^{\text{ن}} \text{ب}^{\text{ا}} \text{لا}^{\text{ن}} + \text{ب}^{\text{ا}} \text{لا}^{\text{ن}} - \dots - \text{ب}^{\text{ا}} \text{لا}^{\text{ن}} = (\text{لا} + \text{ع}) (\text{لا} + \text{ع}) \dots (\text{لا} + \text{ع})$$

ضرب دینے سے

$$(\text{لا}^{\text{ن}} \text{ب}^{\text{ا}} \text{لا}^{\text{ن}} + \text{ب}^{\text{ا}} \text{لا}^{\text{ن}} - \dots - \text{ب}^{\text{ا}} \text{لا}^{\text{ن}}) (\text{لا}^{\text{ن}} \text{ب}^{\text{ا}} \text{لا}^{\text{ن}} + \text{ب}^{\text{ا}} \text{لا}^{\text{ن}} - \dots + \text{ب}^{\text{ا}} \text{لا}^{\text{ن}})$$

$$= (\text{لا} - \text{ع})^2 (\text{لا} - \text{ع})^2 \dots (\text{لا} - \text{ع})^2$$

یہ ظاہر ہے کہ اس متماثلہ کے پہلے رکن کو پھیلا یا جائے تو پھیلاؤ میں لا کی صرف جفت قوتیں داخل ہونگی اس لئے ہم لا کی بجائے ما رکھ سکتے ہیں جس سے ہمیں حاصل ہوگا

$$\text{ما}^{\text{ن}} \text{ب}^{\text{ا}} \text{ما}^{\text{ن}} - \text{ب}^{\text{ا}} \text{ما}^{\text{ن}} + (\text{ب}^{\text{ا}} \text{ما}^{\text{ن}} - \text{ب}^{\text{ا}} \text{ما}^{\text{ن}} + \text{ب}^{\text{ا}} \text{ما}^{\text{ن}} - \text{ب}^{\text{ا}} \text{ما}^{\text{ن}}) + \dots + \text{ما}^{\text{ن}} \text{ب}^{\text{ا}} \text{ما}^{\text{ن}}$$

$$= (\text{ما} - \text{ع})^2 (\text{ما} - \text{ع})^2 \dots (\text{ما} - \text{ع})^2$$

اسکے پہلے رکن کو صفر کے مساوی رکھا جائے تو مطلوبہ استحالة شدہ مساوات ملے گی۔

نوٹ :- اس استحالة کا فائدہ یہ ہے کہ ہم اکثر صورتوں میں دی ہوئی مساوات کی حقیقی اصلوں کی تعداد کی انتہا متعین کر سکیں گے۔ کیونکہ ایک حقیقی اصل کا مربع ہمیشہ مثبت ہونا چاہئے اور اسلئے استحالة شدہ مساوات کی جتنی اصلیں مثبت ہونگی اتنے زیادہ دی ہوئی مساوات کی اصلیں حقیقی نہیں ہو سکتیں۔

۲۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں مساوات

$$\text{لا}^{\text{ن}} - \text{لا}^{\text{ا}} + ۶ = ۰$$



کی اصلوں کے مربع ہوں۔

جواب :-  $a^2 + 15a + 36 = 0$ ۔

موخر الذکر مساوات میں ڈیکارٹ کے قانون علامت سے ایک سے زیادہ مثبت اصلیں نہیں ہو سکتیں اس لئے قبل الذکر کی دو اصلیں خیالی ہوں گی۔

۳۔ وہ مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں مساوات

$$a^2 + 15a + 36 = 0$$

کی اصلوں کے مربع ہوں۔

جواب :-  $a^2 + 15a + 36 = 0$ ۔

ڈیکارٹ کے قانون علامت سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ابتدائی مساوات کی چار اصلیں خیالی ہونی چاہئیں۔

۴۔ مثال کے طریقہ سے دفعہ ۳۹ کی مثالوں ۱ اور ۲ کی تصدیق کرو۔

۵۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں مساوات

$$a^2 + 15a + 36 = 0$$

کی اصلوں کے مکعب ہوں۔

یہ معلوم رہے کہ مثال ۱ کے عمل میں ہم نے دئے ہوئے تفاعل ف (لا) کو

ف (لا) سے ضرب دیا ہے۔ ان تفاعلوں میں جو تغیر ہیں وہ اس طرح حاصل

کئے گئے ہیں کہ مساوات  $a^2 + 15a + 36 = 0$  کی دونوں اصلوں سے لا کو ضرب دیا گیا ہے۔ موجودہ

صورت میں ہیں ف (لا) ف (سہ لا) ف (سہ لا) کو باہم ضرب دینا چاہیئے۔

یہاں ان تفاعلوں میں جو تغیر ہیں وہ مساوات  $a^2 + 15a + 36 = 0$  کی اصلوں سے لا کو

ضرب دینے پر حاصل ہوتے ہیں۔ استحصال کو ذیل کے طریقہ پر بہ آسانی عمل میں

لایا جاسکتا ہے :-

کثیر الارقام ف (لا) کو شکل

$$(a^3 + 15a^2 + 36a) + (15a^2 + 15 \cdot 15a + 15 \cdot 36) + (36a + 36 \cdot 15 + 36 \cdot 36) = 0$$

میں لکھو جو ہم اختصاراً

ف + لاق + لا<sup>۱</sup>س سے تعبیر کریں گے جہاں 'ف'، 'ق'، 'س' سب کے سب لا کے تفاعل ہیں۔

اب

(۱) ف + لاق + لا<sup>۱</sup>س ≡ (لا-عم) (لا-عم) ..... (لا-عم) (۱)  
اس مثال میں لا کی بجائے یکے بعد دیگرے سہ لا اور سہ لا رکھا جائے تو

(۲) ف + سہ لاق + سہ لا<sup>۱</sup>س ≡ (سہ لا-عم) (سہ لا-عم) ... (سہ لا-عم) (۲)

(۳) ف + سہ لاق + سہ لا<sup>۱</sup>س ≡ (سہ لا-عم) (سہ لا-عم) ... (سہ لا-عم) (۳)  
کیونکہ 'ف'، 'ق'، 'س' غیر متغیر رہتے ہیں اس وجہ سے کہ وہ لا کے تفاعل ہیں۔

اب (۱)، (۲)، (۳) کو باہم ضرب دو اور دفعہ ۲۶ کے تجزوں کو استعمال کرو تو

ف + لا<sup>۱</sup> + لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۳</sup> + لا<sup>۴</sup> ق س ≡ (لا-عم) (لا-عم) ... (لا-عم) (۴)

اس مثال کے پہلے رکن میں لا کی قوتیں صرف ۳ کا ضعف ہیں اس لئے ہم لا<sup>۱</sup> کی بجائے ما درج کر سکتے ہیں جس سے مطلوبہ مثال شدہ مساوات حاصل ہو جائیگی۔

۶۔ وہ مساوات معلوم کرو جس کی اصلیں مساوات

$$لا^۱ - لا^۲ + لا^۳ + لا^۴ + لا^۵ = ۰$$

کی اصلوں کے کعب ہوں۔

جواب :- لا<sup>۱</sup> + لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۳</sup> + لا<sup>۴</sup> + لا<sup>۵</sup> + لا<sup>۶</sup> + لا<sup>۷</sup> + لا<sup>۸</sup> = ۰

۷۔ مثال ۵ کے طریقے سے دفعہ ۳۹ کی مثال ۲ کی تصدیق کرو۔

۸۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں مساوات

$$لا^۱ + لا^۲ + لا^۳ + لا^۴ + لا^۵ + لا^۶ + لا^۷ + لا^۸ = ۰$$

کی اصلوں کے کعب ہوں۔

جواب :- لا<sup>۱</sup> + لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۳</sup> + لا<sup>۴</sup> + لا<sup>۵</sup> + لا<sup>۶</sup> + لا<sup>۷</sup> + لا<sup>۸</sup> = ۰

$$+ لا^۹ + لا^۱۰ + لا^۱۱ + لا^۱۲ + لا^۱۳ + لا^۱۴ + لا^۱۵ + لا^۱۶ + لا^۱۷ + لا^۱۸ = ۰$$

۴۱۔ استحالہ کی عام صورت۔ استحالہ کے عام مسئلہ میں ہمیں

ما میں ایک نئی مساوات بنانی ہوگی جس کی اصلیں دی ہوئی مساوات ف (لا) =۔ کی اصلوں کے ساتھ ایک دیا ہوا ربط فہ (لا، ما) =۔ رکھیں۔ ایسی صورت میں استحالہ شدہ مساوات اس طرح حاصل ہوگی کہ دی ہوئی مساوات میں لا کی وہ قیمت ما کی رقوم میں درج کی جائے جو ربط فہ (لا، ما) =۔ سے حاصل ہو۔ یا یہ الفاظ دیگر دونوں مساواتوں ف (لا) =۔ اور فہ (لا، ما) =۔ سے لا ساقط کر دیا جائے۔ مثلاً فرض کرو کہ ایسی مساوات بنانا مطلوب ہے جسکی اصلیں مساوات

$$\text{لا} - \text{ف} + \text{لا} + \text{ق} - \text{لا} - \text{ر} = .$$

کی اصلوں (عہ، یہ، جہ) میں سے دو اصلوں کے مجموعے ہوں۔  
یہاں

$$\text{ما} = \text{جہ} + \text{جہ} = \text{عہ} + \text{یہ} + \text{جہ} = \text{عہ} = \text{ف} - \text{عہ}$$

مساوات فہ (لا، ما) =۔ اس صورت میں ما = ف - لا ہے کیونکہ جب لا قیمت عہ اختیار کرتا ہے تو ما مجوزہ قیمتوں میں سے ایک قیمت اختیار کرتا ہے اور جب لا دوسری قیمتیں یہ اور جہ اختیار کرتا ہے تو ما دوسری مجوزہ قیمتیں اختیار کرتا ہے۔ اس لئے دی ہوئی مساوات میں لا کی بجائے ف - ما درج کرنے سے مطلوبہ استحالہ شدہ مساوات حاصل ہو جاتی ہے۔

## مثالیں

۱۔ اگر کمی

$$\text{لا} - \text{ف} + \text{لا} + \text{ق} - \text{لا} - \text{ر} = .$$

کی اصلیں عہ، یہ، جہ ہوں تو وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں ہوں

$$\text{جہ} + \text{جہ} + \frac{1}{\text{عہ}} + \frac{1}{\text{جہ}} = \frac{1}{\text{عہ}} + \text{جہ} + \text{جہ}$$

یہاں

$$\frac{1+a}{ع} = \frac{1+جہ}{ع} = \frac{1}{ع} + جہ = م$$

یعنی دیا ہوا ربط لا م = ۱ + ر ہے۔ اس لئے ف (لا) = ۰ میں لا کی بجائے  $\frac{1+a}{م}$  درج کرنے سے استحصال شدہ مساوات حاصل ہوتی ہے۔

جواب :- ر ا۔ ق (۱+ر) م ا + ف (۱+ر) م۔ (۱+ر) =

۲۔ اسی کعبی کے لئے وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں  
عہ + جہ + عہ جہ + عہ + جہ + جہ + عہ جہ

ہوں۔

لا کی بجائے  $\frac{1}{ق-م}$  درج کرو۔

جواب :- م ا۔ ق م ا + (ف ر + ق) م ا + ر۔ ف ق ر =

(81)

۳۔ اسی کعبی کے لئے وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

$$\frac{عہ}{جہ + جہ - عہ} + \frac{جہ}{جہ + جہ - عہ} + \frac{جہ}{جہ + جہ - عہ}$$

ہوں۔

لا کی بجائے  $\frac{ف م}{م ۲ + ۱}$  درج کرو۔

جواب :- (ف ۲ - م ف ق + ۸ ر) م ا

+ (ف ۲ - م ف ق + ۱۲ ر) م ا + (۲ - ف ق) م ا + ر =

۴۔ اگر کعبی

$$لا ۲ + ۳ ب لا ۳ + ج لا + د =$$

کی اصلیں عہ + جہ + جہ ہوں تو ثابت کرو کہ ہم رسم استحصال

$$لا لا م ا + ب (لا + م) + ج =$$

سے ما میں ایسی مساوات حاصل ہوتی ہے جسکی اصلیں

$$\frac{(بہ - جہ - عہ)}{بہ + جہ - عہ} = \frac{(جہ - عہ - ہا)}{جہ + عہ - ہا} = \frac{(عہ - بہ - جہ)}{عہ + بہ - جہ}$$

ہیں۔

۴۲۔ کبھی کی مربع دار فرقوں کی مساوات۔ دفعہ سابق

میں ہم نے جس استعمال کا ذکر کیا ہے اس کو اب ہم ایک اہم مسئلہ پر یعنی اُس مساوات کے بنانے میں استعمال کریں گے جس کی اصلیں دی ہوئی مساوات کی دو دو اصلوں کے فرقوں کے مربع ہوں۔

پہلے ہم کبھی

$$لا + ق + لا + ر =$$

(۱) کے لئے جس میں دوسری رقم موجود نہیں ہے اس قسم کا عمل کریں گے اور ہم جانتے ہیں کہ عام مساوات کو شکل (۱) میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔ فرض کرو کہ اسکی اصلیں عہ بہ جہ ہیں۔ مابین وہ مساوات بنانا مطلوب ہے جسکی اصلیں

$$(بہ - جہ) (جہ - عہ) (عہ - بہ)$$

ہوں۔

یہاں ہم دیکھتے ہیں کہ دفعہ ۳۹ کا طریقہ اس عام مسئلہ کو حل کرنے میں یعنی ایسی مساوات کے بنانے میں جس کی اصلیں دی ہوئی مساوات کی دو دو اصلوں کے فرقوں کے مربع ہوں استعمال کیا جاسکتا ہے کیونکہ جب حاصل ضرب

$$\{ (عہ - بہ) (بہ - جہ) \} \{ (جہ - عہ) (عہ - بہ) \} \{ (بہ - جہ) (جہ - عہ) \} \dots \dots \dots$$

معلوم ہو جائے تو مابین متواتر فرقوں کے سر، عہ، عہ، عہ، وغیرہ کے متشاکل تفاعل ہونگے اور اسلئے دی ہوئی مساوات کے سروں کی رقوم میں

(82)

بیان ہو سکیں گے۔ لیکن موجودہ مثال میں دفعہ ۴ کے طریقہ سے مطلوبہ مساوات زیادہ آسانی سے حاصل ہوتی ہے۔ اس مساوات کو ہم اختصاراً مجوزہ مساوات کی ”مرجع دار فرقوں کی مساوات“ کہیں گے۔ یا کہ استحالہ شدہ مساوات کی اصلوں میں سے کسی ایک کے مساوی رکھنے سے مثلاً

$$۱ = (ب - ج) = ع^۱ + ب^۲ + ج^۲ - ع^۲ - ۲ ع ب ج$$

لیکن  $ع^۱ + ب^۲ + ج^۲ = ۲ ق$  اور  $ع ب ج = ۱$  اس لئے دفعہ ۴ کی مساوات ذ (لا، ما) = ۰ ہو جاتی ہے

$$۱ = ۲ ق - لا + \frac{۲}{لا}$$

یا  $لا + (ما + ۲ ق) - ۲ = ۰$  دی ہوئی مساوات کو اس میں سے تفریق کیا جائے تو

$$(ما + ق) - لا - ۳ = ۰ \text{ یعنی } لا = \frac{۳}{ما + ق}$$

پس مابین استحالہ شدہ مساوات ہوگی

$$ما + ۶ ق + ما + ۹ ق + ما + ۴ ق + ۲ = ۰ \dots\dots\dots (۲)$$

اگر وہ مساوات بنا ما مطلوب ہو چکی اعلیٰ کی

$$لا - لا - ۳ لا + ۳ لا + لا + لا = ۰ \dots\dots\dots (۳)$$

کی اصلوں (ع، ب، ج) میں سے دو دو کے فرقوں کے مرجع ہوں تو ہم اول دوسری رقم کو خارج کرتے ہیں جس سے مساوات حاصل ہوگی

$$۱ + \frac{۳}{لا} + \frac{۳}{لا} = ۰$$

اور مطلوبہ مساوات وہی ہوگی جو اس مساوات کی مربع دائروں کی مساوات ہے کیونکہ دوسری رقم کو خارج کرنے سے کسی دو اصولوں کا فرق غیر متبدل رہتا ہے۔ اس لئے مؤخر الذکر مساوات میں

$$ق = \frac{۲۵}{۱۱} ، ر = \frac{۲۱}{۱۱}$$

رکنے سے ہم مطلوبہ مساوات حاصل کر سکتے ہیں۔ چنانچہ مطلوبہ مساوات ہے

$$لا + \frac{۱۸}{۱۱} لا + \frac{۸۱}{۱۱} لا + \frac{۲۴}{۱۱} (گ + ۲۴) = ۰ \dots (۴)$$

جسکی اصلیں ہیں

(ب-ج) ، (ج-ع) ، (ع-ب) مساوات (۴) سے کسروں کو دور کر نیکے لئے اس کی اصولوں کو ب سے ضرب دینا ہوگا جس سے یہ مساوات ہو جائیگی

$$لا + ۱۸ لا + ۸۱ لا + ۲۴ (گ + ۲۴) = ۰ \dots (۵)$$

جسکی اصلیں ہونگی

$$ب (ب-ج) ، ب (ج-ع) ، ب (ع-ب)$$

اسکی مدد سے کبھی (۳) کی اصولوں کا ایک اہم تقاضا عمل یعنی

فروق کے مربعوں کا حاصل ضرب سروں کی رقوم میں معلوم کیا جاسکتا ہے :-

$$ب (ب-ج) ، ب (ج-ع) ، ب (ع-ب) = ۲۴ (گ + ۲۴) \dots (۶)$$

دفعہ ۳ کی تائید سے یہ ظاہر ہے کہ گ + ۲۴ کا ایک جزو ضربی





مساوات (۵) کی ایک اصل منفی ہو تو کبھی (۳) کی دو اصلیں خیالی ہوں گی تاکہ ان کے ذوق کا مربع منفی ہو۔ اور جب مساوات (۵) کی کوئی اصل منفی نہ ہو تو کبھی (۳) کی سب اصلیں حقیقی ہوں گی کیونکہ (۳) کی خیالی اصلوں کے ایک زوج سے (۵) کی ایک منفی اصل ہو جو دہونا لازم آتا ہے۔  
 حسب ذیل صورتوں میں یہ مان لیتے ہیں کہ مساوات (۵) کے سر حقیقی مقادیر ہیں۔ تب چار صورتیں پیدا ہوتی ہیں:-

(۱) اگر  $g^2 + 4h^2$  منفی ہو تو کبھی کی سب اصلیں حقیقی

ہوں گی۔ کیونکہ اسکو منفی بنانے کے لئے  $h$  کو منفی ہونا چاہئے (اور  $g$   $h^2$  کے گ)۔ تب مساوات (۵) کی علامتیں یکے بعد دیگرے مثبت اور منفی ہوں گی اور اسلئے (دفعہ ۲۰ سے) مساوات (۵) کی کوئی اصل منفی نہیں ہوگی اور اسلئے دے ہوئے کبھی کی تمام اصلیں حقیقی ہوں گی۔

(۲) اگر  $g^2 + 4h^2$  مثبت ہو تو کبھی کی دو اصلیں خیالی ہوں گی

کیونکہ اس صورت میں مساوات (۵) کی ایک اصل منفی ہونی چاہئے۔

(۳) اگر  $g^2 + 4h^2 = 0$ ۔ تو کبھی کی دو اصلیں مساوی ہوں گی

کیونکہ ایسی صورت میں مساوات (۵) کی ایک اصل صفر کے مساوی ہوتی ہے۔ اس صورت میں  $h = 0$ ۔ اور یہ مان لیا گیا ہے کہ  $h$  معدوم نہیں ہوتا۔ اسلئے

ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ ممیز (دفعہ ۲۲) کا صفر ہونا وہ شرط ظاہر کرتا ہے جو مساوی اصلوں کے لئے ہے۔

(۴) اگر  $g^2 + 4h^2 = 0$ ۔ اور  $h = 0$ ۔ تو کبھی کی تینوں اصلیں

مساوی ہوں گی۔ کیونکہ ایسی صورت میں مساوات (۵) کی سب اصلیں



اس مساوات کی دوسری جانب کے جملہ کو  $(\text{لا}^{\text{عمر}})$  سے تعبیر کیا جائے اور متماثلات (۱) کو باہم ضرب دیا جائے تو

$$\text{فہ} (\text{لا}^{\text{عمر}}) \text{فہ} (\text{لا}^{\text{عمر}}) \dots \dots \text{فہ} (\text{لا}^{\text{عمر}})$$

$$\equiv \{ \text{لا}^{\text{عمر}} - \text{عمر} \}^2 \{ \text{لا}^{\text{عمر}} - \text{عمر} \}^2 \dots \dots \{ \text{لا}^{\text{عمر}} - \text{عمر} \}^2$$

اس لئے فرقوں کی مساوات بنانے کے لئے ہم ان اجزائے ضربی  $\text{فہ} (\text{لا}^{\text{عمر}})$ ،  $\text{فہ} (\text{لا}^{\text{عمر}})$  وغیرہ کو باہم ضرب دیکھتے ہیں اور حاصل ضرب میں اصولوں کے جو متشاکل تفاعل واقع ہوتے ہیں انہی بجائے ان کی قیمتیں سروں کی رقوم میں درج کر سکتے ہیں۔ یا ہم دفعہ ۲۲ میں بتائے ہوئے طریقہ کی بموجب متماثل بالا کی بائیں جانب کے  $\frac{1}{n} - 1$  اجزائے ضربی کا حاصل ضرب بالراست معلوم کر سکتے ہیں اور پھر متشاکل تفاعل کو بھی بجائے ان کی قیمتیں سروں کی رقوم میں درج کر سکتے ہیں۔ لائیں  $n - 1$  دیں درجہ کی حاصل ہونے والی مساوات کی اصولوں میں سے دو اصلیں مساوی مگر مختلف تعلامت ہونگی۔ اب چونکہ اس مساوات میں  $\frac{1}{n} - 1$  کی صرف جفت قوتیں واقع ہوتی ہیں اس لئے  $\text{لا}^{\text{عمر}}$  کی بجائے  $\text{ما}$  درج کیا جاسکتا ہے اور اس طرح  $\frac{1}{n} - 1$  دیں درجہ کی وہ مساوات حاصل ہوسکتی ہے جسکی اصلیں دی ہوئی مساوات کی اصولوں کے فرقوں کے مربع ہوں۔

تیسرے درجہ سے اعلیٰ تر مساواتوں کے لئے فرقوں کی مساوات کا بنانا دشوار ہو جاتا ہے۔ ہم کسی آئندہ باب میں درجہ چہارم کی عام جبری مساوات کی صورت میں فرقوں کی مساوات معلوم کریں گے۔

## مثالیں

۱۔ مساوات

$$\text{لا}^2 - 6 \text{لا} + 11 = 0$$

کی اصلیں  $\text{عہ}^2$ ،  $\text{عہ}$ ،  $\text{یہ}$ ،  $\text{جہ}$  ہیں۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

$$۲ + ۲جہ، ۲جہ + ۲عہ، ۲عہ + ۲پہ$$

ہوں۔

$$\text{جواب :- } ۲ - ۲ا - ۲۸ + ۲۲۵ - ۲۵۰ = ۰$$

۲۔ کبھی

$$۰ = ۱ + ۳لا + ۲لا$$

کی اصلیں عہ، بہ، جہ ہیں۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲جہ} - \frac{۱}{۲عہ}، \frac{۱}{۲جہ} + \frac{۱}{۲عہ} - \frac{۱}{۲پہ}، \frac{۱}{۲عہ} - \frac{۱}{۲پہ} + \frac{۱}{۲جہ}$$

ہوں۔

$$\text{جواب :- } ۲ + ۱۲ا - ۱۲۸ + ۲۰۴۲ = ۰$$

۳۔ کبھی

$$۰ = ۱ + ۱ق + ۲لا$$

کی اصلیں عہ، بہ، جہ ہیں۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

$$۲ + ۲بہ + ۲جہ، ۲جہ + ۲عہ + ۲جہ + ۲عہ، ۲عہ + ۲عہ + ۲بہ + ۲$$

ہوں۔

$$\text{جواب :- } (۱ + ۱ق) = ۰$$

۴۔ کبھی

$$۰ = ۱ + ۱ق + ۲لا + ۲ف$$

کی اصلیں عہ، بہ، جہ ہیں۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

$$۲ + ۲جہ - ۲عہ، ۲جہ + ۲عہ - ۲پہ، ۲پہ + ۲عہ - ۲جہ$$

ہوں۔

$$\text{جواب :- } ۲ا - (۲ق - ۱ا) - (۲ق - ۱ا) + ۲ف + ۲ف + ۲ا$$

$$+ ۲ف - ۲ق + ۲ق + ۲ف + ۲ق - ۱ا + ۲ق + ۲ا = ۰$$

۵۔ اگر کبھی

لا<sup>۲</sup> = ۳(۱+۱+۱) لا + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۲۲  
 کی اصلیں ع، بہ، جہ ہوں تو ثابت کرو کہ (بہ-جہ) (جہ-عہ) (عہ-بہ) کا  
 ایک متعلق تفاعل ہے۔

جواب :- ۹(۱+۱+۱)

۶- کبھی

لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۲</sup> =  
 کے گ اور ھ کے درمیان ربط معلوم کرو اگر اس کی اصلیں ع، بہ، جہ ایسی ہوں  
 کہ (بہ-جہ) (جہ-عہ) (عہ-بہ) سلسلہ حسابیہ میں ہیں۔  
 جواب :- گ + ۲ = ۲۲

۷- اگر

$$ج\ لا^2 = ۲ج\ لا^2 + لا^2 - ۱ = ۱$$

کی اصلیں ع، بہ، جہ، ضہ ہوں تو

(بہ-جہ) (جہ-عہ) (عہ-بہ) + (جہ-عہ) (عہ-بہ) (بہ-جہ) + (عہ-بہ) (بہ-جہ) (جہ-عہ) =

جواب :- صفر

کی قیمت معلوم کرو۔

۸- اگر

$$بہ + جہ + جہ + عہ + عہ + عہ + عہ + عہ + عہ = ۰$$

تو ثابت کرو کہ

{(بہ-جہ) (جہ-عہ) (عہ-بہ) + (جہ-عہ) (عہ-بہ) (بہ-جہ) + (عہ-بہ) (بہ-جہ) (جہ-عہ)}

= ۱۸ { (بہ-جہ) (جہ-عہ) (عہ-بہ) + (جہ-عہ) (عہ-بہ) (بہ-جہ) + (عہ-بہ) (بہ-جہ) (جہ-عہ) }

۹- مساوات

$$لا^5 = لا^4 + لا^4 + لا^4 + لا^4 + لا^4 = ۱۵$$

کو مل کر جس کی ایک اہل شکل + عہ ملے گی ہے۔

اصولوں کو بقدر ا کے گھٹاؤ۔ لا کی بجائے عہ ملے گا۔ آ درج کرو۔ عہ کو

ساداتیں عہ۳ - عہ۲ = ۴ - اور عہ۶ - عہ۲ = ۸ + ۰ پوری کرنی چاہئیں۔ پس عہ۳ = ۲  
اس لئے ایک جزو ضربی لا۲ - لا۵ ہے اور دوسرے اجزا (لا۱) اور (لا۳) ہیں  
۱۰۔ کبھی

$$\begin{aligned} & لا۳ + لا۳ + لا۳ + لا۳ + لا۳ + لا۳ = ۰ \\ & \text{کی اصلیں عہ، بہ، جہ ہیں۔ وہ سادات بناؤ جس کی اصلیں} \\ & \text{بہ + جہ، جہ + عہ، عہ + بہ} \end{aligned}$$

ہوں۔

اس سادات کو دفعہ ۴ میں حل کر دیا گیا ہے۔ ہم یہاں دوسرا حل درج کرتے  
ہیں جو اگرچہ اس خاص مثال میں آسان ترین نہیں ہے لیکن بہت سی مثالوں میں  
کارآمد ثابت ہوگا۔ فرض کرو کہ دی ہوئی سادات کی اصلوں کو بقدر ۴ کے  
گھٹایا گیا ہے تو احتمالاً شدہ سادات ہوگی (دفعہ ۳۵)

$$لا۳ + لا۳ + لا۳ + لا۳ + لا۳ + لا۳ = ۰$$

جسکی اصلیں عہ - عہ، بہ - عہ، جہ - عہ ہیں۔ اب ہم وہ شرط معلوم کرینگے کہ  
اس سادات کی دو اصلیں مساوی مگر مختلف علامت ہوں۔ یہ شرط ہے  
(دیکھو دفعہ ۲۴ مثال ۱)

$$۹ لا۱ - لا۱ - لا۱ = ۰$$

یہ سادات ۴ میں ایک کبھی ہے جس کی اصلیں

$$\frac{۱}{۳} (بہ + جہ) - \frac{۱}{۳} (جہ + عہ) - \frac{۱}{۳} (عہ + بہ)$$

ہیں کیونکہ شرط بالا ہے

$$(بہ - عہ) + (جہ - عہ) = ۰$$

یعنی

$$۲ = بہ + جہ$$

جہاں بہ اور جہ سے دی ہوئی سادات کی کوئی دو اصلیں تعبیر ہوتی ہیں۔ ۴  
کے لئے جو سادات حاصل ہوئی ہے اس کی اصلوں کو ۲ سے ضرب دیکر مطلوبہ

کبھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔

۱۱۔ چار درجی

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ = ۵۵$$

کی اصلیں ع، ہ، جہ، ضہ ہیں۔ چہ درجی مسادات بناؤ جسکی اصلیں

$$ہ + جہ + عہ + عہ + یہ + ضہ + ضہ + جہ + ضہ$$

ہوں۔

مثال ۱۰۔ اکا طریقہ استعمال کرنے سے مطلوبہ مسادات دفعہ ۲۴ مثال ۲۰

کی شرط سے حاصل کیا جاسکتی ہے۔  
اس صورت میں شرط ہوگی

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ = ۵۵$$

یہ مسادات ۵۵ میں چہ درجی ہے جس کی اصلیں ۱ (ہ + جہ) وغیرہ

ہیں جس سے مطلوبہ مسادات گزشتہ مثال کی طرح حاصل کیا جاسکتی ہے۔

۱۲۔ مثال ۱۰ کے کبھی کی صورت میں وہ مسادات بناؤ جس کی اصلیں

(۸۸)

$$\frac{۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰}{۵۵} = \frac{۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰}{۵۵}$$

ہوں۔

اصلوں کو بقدر ۵۵ کے گھٹاؤ اور وہ شرط معلوم کرو کہ حاصل ہونے والے

کبھی کی اصلیں سلسلہ ہندسیہ میں ہوں (دفعہ ۲۴ مثال ۱۸)۔ یہ شرط ہوگی

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ = ۵۵$$

یہ مسادات ۵۵ میں تیسرے درجہ کی مسادات میں تحویل ہوگی جس کی اصلیں

مندرجہ بالا تھیں ہونگی کیونکہ

$$(عہ - عہ) = (ہ - ہ) (جہ - جہ) یعنی ۵۵ = \frac{۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰}{۵۵}$$

۱۳۔ اسی کبھی کی صورت میں ایسی مسادات بناؤ جس کی اصلیں

$$\frac{2 \text{ بہ جبہ} - ۲ \text{ عہ بہ} - ۲ \text{ جہ عہ}}{2 \text{ بہ جبہ} - ۲ \text{ عہ بہ} - ۲ \text{ جہ عہ}} = \frac{2 \text{ عہ بہ} - ۲ \text{ جہ عہ} - ۲ \text{ بہ جبہ}}{2 \text{ عہ بہ} - ۲ \text{ جہ عہ} - ۲ \text{ بہ جبہ}}$$

ہوں۔

اصلوں کو بقدر ۷ کے گھٹاؤ اور وہ شرط معلوم کرو کہ اتنا لہندہ کبھی کی اصلیں  
سلسلہ موسیقیہ میں ہوں (دیکھو دفعہ ۲۴ مثال ۱۹)۔

$$\frac{1}{2 \text{ بہ جبہ}} + \frac{1}{2 \text{ عہ بہ}} = \frac{2}{2 \text{ عہ بہ} - 2 \text{ جہ عہ}}$$

$$\frac{2 \text{ بہ جبہ} - 2 \text{ عہ بہ} - 2 \text{ جہ عہ}}{2 \text{ عہ بہ} - 2 \text{ جہ عہ} - 2 \text{ بہ جبہ}} = ۷ \text{ یعنی}$$

۷ میں مسادات ہے

$$۱ \text{ لہ} - ۳ \text{ لہ} - ۲ \text{ لہ} + ۲ \text{ لہ} = ۰$$

جہاں کبھی میں تحویل ہو جائیگی۔

۱۴۔ چار درجی

$$۱ \text{ لہ} + ۴ \text{ لہ} + ۶ \text{ لہ} + ۴ \text{ لہ} + ۱ \text{ لہ} = ۰$$

کی اصلیں ۷ بہ ۲ جہ ۲ عہ ہیں۔ وہ کبھی معلوم کرو جس کی اصلیں

$$\frac{2 \text{ بہ جبہ} - 2 \text{ عہ بہ} - 2 \text{ جہ عہ}}{2 \text{ بہ جبہ} - 2 \text{ عہ بہ} - 2 \text{ جہ عہ}} = \frac{2 \text{ عہ بہ} - 2 \text{ جہ عہ} - 2 \text{ بہ جبہ}}{2 \text{ عہ بہ} - 2 \text{ جہ عہ} - 2 \text{ بہ جبہ}}$$

ہوں۔

اصلوں کو بقدر ۷ کے گھٹاؤ اور دفعہ ۲۴ مثال ۲ کی شرط استعمال کرو۔  
اس صورت میں یہ شرط ہے

$$۱ \text{ لہ} - ۱ \text{ لہ} = ۰$$







# پانچواں باب

(90)

## متکافی اور شنائی مساواتوں کا حل

۴۵۔ متکافی مساواتیں۔ دفعہ ۲۰ میں یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ

تمام متکافی مساواتوں کو ایک معیاری شکل میں تختہ لایا جاسکتا ہے جس کا درجہ جفت ہو اور ابتدا اور آخر سے شمار کی ہوئی رتھیں مساوی اور علامت ہوں۔ اب ہم یہ ثابت کریں گے کہ معیاری شکل کی متکافی مساوات کو دوسری ایسی مساوات میں بدلایا جاسکتا ہے جس کا درجہ دی ہوئی مساوات کے درجہ کا نصف ہو۔

مساوات

$$x^{2m} + a_1 x^{2m-2} + a_2 x^{2m-4} + \dots + a_{m-1} x^2 + a_m = 0$$

پر غور کرو۔ اس کو  $x^m$  سے تقسیم کر کے ابتدا اور آخر سے متساوی الفصل رقموں کو ملانے سے

$$x^m + \left(\frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x^4} + \dots + \frac{a_{m-1}}{x^{2m-2}} + \frac{a_m}{x^{2m}}\right) = 0$$

فرض کرو کہ  $\frac{1}{x^2} = y$  اور یہ کہ  $\frac{1}{x^{2m}} = y^m$  اختصاراً  $y$  سے تعبیر

ہوتا ہے تو صریحاً رابطہ حاصل ہوتا ہے



۲۔ مساوات

$$لا - لا^۳ + لا^۵ - لا^۵ + لا^۳ - لا^۱ = ۱$$

کی اصلیں معلوم کرو۔  
لا - ۱ سے تقسیم کرو جبکہ اختصار ایوں کیا جاسکتا ہے۔

$$\begin{array}{r} ۱ - ۳ - ۵ - ۵ - ۳ - ۱ \\ ۱ - ۲ - ۳ - ۲ - ۱ \\ \hline ۰ \end{array}$$

تو ہمیں نیکانی مساوات ملتی ہے

$$لا - لا^۲ + لا^۳ - لا^۲ + لا^۱ = ۱ \dots \dots \dots (۱)$$

$$یا \quad (لا + \frac{۱}{لا}) - (لا + \frac{۱}{لا})^۲ = ۳$$

وہ کی بجائے ی - ۴ ی + ۲ اور و کی بجائے ی - ۲ درج کرنے سے

$$ی - ۶ ی + ۹ = ۰ \text{ یعنی } (ی - ۳)^۲ = ۰$$

جس سے  $ی = ۳$  اور  $ی = ۳$

$$\text{یعنی } لا + \frac{۱}{لا} = ۳ \text{ اور } لا + \frac{۱}{لا} = ۳$$

اور ان مساواتوں کی اصلیں ہیں

$$\frac{۱ - لا \pm لا^۳}{۲} \text{ اور } \frac{۱ - لا \pm لا^۳}{۲}$$

یہ اصلیں مساوات (۱) کی دوہری اصلیں ہیں۔

۳۔ مساوات

$$لا - ۱ = ۰$$

کو حل کرو۔

اسکو لا - ۱ سے تقسیم کیا جائے تو

$$لا + لا^۲ + لا^۳ + لا^۴ + لا^۵ = ۱$$

جس سے حاصل ہوتا ہے

$$0 = 1 - ی + ی^۲$$

اس مساوات کو حل کرنے سے

$$0 = 1 + لا (۱ + ۵۲) + لا^۲$$

$$0 = 1 + لا (۵۲ - ۱) + لا^۲$$

اور پھر ان مساواتوں سے

$$لا = \frac{1}{۲} \{ -۱ + ۵۲ \pm (۱ + ۵۲) \}$$

جہاں  $۵۲ = ۱$

اس جملہ سے لا کی چار قیمتیں ملتی ہیں۔

$$۴ - لا + ۱ = ۰$$

کے دو درجی اجزائے ضربی معلوم کرو۔

اس کو مستحیل کرنے سے

$$0 = ی^۳ - ۳ ی$$

$$اس لئے ی = ۰ اور ی = ۳$$

اس لئے دی ہوئی مساوات کے دو درجی اجزائے ضربی ہیں

$$لا + ۱ = ۰، لا \pm لا ۳ + ۱ = ۰$$

۵ - مساواتوں

$$(۱) (لا + ۱) = لا (لا + ۱) ، (۲) (لا + ۱) = لا (لا + ۱)$$

کو حل کرو۔

$$۶ - لا = \frac{(لا - ۱)}{لا - ۱} + \frac{(لا + ۱)}{لا + ۱}$$

کو ایسی مساوات میں تحویل کرو جو ی میں چوتھے درجہ کی ہو۔

$$جواب :- (۱ - ی) + ی (۳ + ۱) - ی (۳ + ۱) = ۰$$

## ۴۶۔ ثنائی مساواتیں۔ عام خواص۔

ثنائاتی مساواتوں کے اہم خواص اس دفعہ اور دفعات آئندہ میں ثابت کئے جائیں گے۔

سئلہ ۱۔ اگر  $\lambda = 1$  کی ایک خیالی اصل عد ہو تو علم بھی ایک اصل ہوگی جہاں  $m$  کوئی صحیح عدد ہے۔  
چونکہ عد ایک اصل ہے اسلئے

$$ع = 1 \text{ اور اسلئے } (ع) = 1 \text{ یعنی } (ع) = 1$$

یعنی  $\lambda = 1$  کی ایک اصل عد ہے۔  
۱۔ بات مساوات  $\lambda + 1 = 1$  کی صورت میں بھی درست ہے بشرطیکہ  $m$  طاق عدد ہو۔

۴۷۔ اگر صحیح عدد  $m$  اور  $n$  ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد ہوں تو مساواتوں  $\lambda = 1$ ،  $\lambda' = 1$  میں کوئی اصل سوائے اکائی کے مشترک نہیں ہو سکتی۔

اس کو ثابت کرنے کے لئے ہم صحیح عددوں کی حسب ذیل خاصیت استعمال کرتے ہیں:-

اگر صحیح عدد  $m$  اور  $n$  ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد ہوں تو صحیح عدد  $d$  اور  $b$  معلوم کئے جاسکتے ہیں ایسے کہ  $m = d \cdot b$ ۔  $n = d \cdot 1$ ۔  
کیونکہ فی الحقیقت جب  $\frac{m}{n}$  کو ایک کسر مسلسل کی شکل میں لکھا جاتا ہے تو  $\frac{1}{b}$  وہ

تقرب ہے جو کسر  $\frac{1}{2}$  کے تقریبوں میں ماقبل آخر واقع ہوتا ہے۔  
اب اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ دی ہوئی مساواتوں کی کوئی مشترک اصل  $\mathcal{E}$

ہے۔ تب

$$\mathcal{E} = 1 \text{ اور } \mathcal{E} = 1$$

$$\text{اسلئے} \quad \mathcal{E} = 1 \text{ اور } \mathcal{E} = 1$$

جس سے  $\mathcal{E} = 1$  یعنی  $\mathcal{E} = 1$  یا  $\mathcal{E} = 1$   
یعنی دی ہوئی مساواتوں کی مشترک اصل صرف ۱ ہے۔

۴۸۔ سلسلہ ۳۔ اگر دو صحیح عددوں  $m$  اور  $n$  کا مقسوم علیہ اعظم  $k$  ہو تو مساواتوں  $لا - ۱ = ۱$  اور  $لا - ۱ = ۱$  کے درمیان مشترک اصلیں مساوات  $لا - ۱ = ۱$  کی اصلیں ہونگی۔

اس کو ثابت کرنیکے لئے فرض کرو کہ

$$m = k \cdot n \text{ اور } n = k \cdot n$$

اب چونکہ  $m$  اور  $n$  ایسے عدد ہیں جو ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد ہیں اسلئے ایسے صحیح عدد  $b$  اور  $d$  معلوم کئے جاسکتے ہیں کہ

$$m - b = n = 1$$

$$m - b = n = 1$$

پس

اسلئے اگر  $لا - ۱ = ۱$  اور  $لا - ۱ = ۱$  کی ایک مشترک اصل  $\mathcal{E}$  ہو تو

$$\mathcal{E} = 1 \text{ یعنی } \mathcal{E} = 1$$

جس کے یہ معنی ہیں کہ مساوات  $لا - ۱ = ۱$  کی ایک اصل  $\mathcal{E}$  ہے۔



۴۹۔ مسئلہ ۴۔ اگر  $n$  ایک مفرد عدد ہو اور  $\lambda = 1$ ۔  $a = 0$  کی کوئی خیالی اصل  $\epsilon$  ہو تو تمام اصلیں سلسلہ  $a, \epsilon, \epsilon^2, \dots, \epsilon^{n-1}$  میں شامل ہیں۔

کیونکہ مسئلہ (۱) سے یہ تمام مقداریں دی ہوئی مساوات کی اصلیں ہیں اور یہ سب مختلف بھی ہیں کیونکہ اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ ان میں سے کوئی دو اصلیں مساوی ہیں یعنی  $\epsilon^i = \epsilon^j$  تو

$$\epsilon^i = \epsilon^j$$

لیکن مسئلہ ۲ سے یہ ناممکن ہے کیونکہ  $n$  بالضرور  $(n-i-j)$  کے لحاظ سے  $j$  سے کم ہے مفرد ہے۔

۵۰۔ مسئلہ ۵۔ اگر صحیح عدد  $n$  کے اجزائے ضربی  $f, q, r$  وغیرہ صحیح عدد ہوں تو مساواتوں  $\lambda = 1, \lambda = \epsilon, \lambda = \epsilon^2, \dots, \lambda = \epsilon^{q-1}$  کی اصلیں مساوات  $\lambda = 1$  کو پورا کریں گی۔

مساوات  $\lambda = 1$  کی ایک اصل  $\epsilon$  پر غور کرو تو  $\epsilon^n = 1$  جس سے

$$(\epsilon^n)^r = 1 \text{ یعنی } \epsilon^n = 1$$

اس لئے مسئلہ ثابت ہے۔

۵۱۔ مسئلہ ۶۔ اگر عدد مرکب  $n$  کے اجزائے ضربی  $f, q, r$  وغیرہ مفرد عدد ہوں تو مساوات  $\lambda = 1$  کی اصلیں حاصل ضرب

$$(1 + \epsilon + \epsilon^2 + \dots + \epsilon^{f-1})(1 + \epsilon^q + \epsilon^{2q} + \dots + \epsilon^{(r-1)q}) \dots (1 + \epsilon^{f_1} + \epsilon^{2f_1} + \dots + \epsilon^{(r_1-1)f_1})$$

کی ن رقیں ہونگی جہاں لا۔ ا۔ کی ایک اصل عہ ہے لا۔ ا۔

کی ایک اصل یہ، وغیرہ۔

ہم اسکوین اجزائے ضربی ف، ق، ر کے لئے ثابت کرتے ہیں۔ عام صورت میں اسی قسم کا ثبوت دیا جاسکتا ہے۔ یہ ظاہر ہے کہ حاصل ضرب کی کوئی رقم مثلاً عہ پ ج مساوات لا۔ ا۔ کی ایک اصل ہے کیونکہ عہ پ = ا،

پ = ا، ج = ا اور اسلئے (عہ پ ج) = ا۔ اسکے علاوہ حاصل ضرب کی کوئی دو رقیں مساوی نہیں ہو سکتیں کیونکہ اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ عہ پ ج دوسری رقم عہ پ ج کے مساوی ہے تو عہ پ = پ۔ ج۔ ج۔

اس مساوات کا پہلا رکن مساوات لا۔ ا۔ کی اصل ہے اور دوسرا رکن مساوات لا۔ ا۔ کی اصل ہے۔ اب ان دو مساواتوں میں کوئی اصل مشترک نہیں ہو سکتی کیونکہ ف اور ق، ر ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد ہیں (مسئلہ ۲)۔

پس عہ پ ج، عہ پ ج کے مساوی نہیں ہو سکتا۔

۵۲۔ مسئلہ۔ اگر ن = ف، ق، ر اور ن کے مفرد اجزاء

ضربی ف، ق، ر ہوں تو مساوات لا۔ ا۔ کی اصلیں شکل

عہ پ ج کے مشابہ ن حاصل ضربوں کے مساوی ہونگی جہاں

لا۔ ا۔ کی ایک اصل عہ ہے، لا۔ ا۔ کی ایک اصل یہ، لا۔ ا۔ کی

ایک اصل ج۔

یہ مسئلہ ۶ کی توسیع ہے جس میں ن کے مفرد اجزاء ایک سے زیادہ مرتبہ ن میں واقع ہوتے ہیں۔ اس کا ثبوت ثبوت بالا کے بالکل مشابہ

ہے۔ چنانچہ عہ یہ جہ جیسا کوئی حاصل ضرب ایک اصل کے مساوی ہوگا کیونکہ عہ = ا، ب = ا، جہ = ا اور ف، ق، ر کا ایک ضعیف ن ہے دفعہ ۵ کے مثال ثبوت سے یہ بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ اس قسم کے کوئی دو حافظ مساوی نہیں ہو سکتے کیونکہ ف، ق، ر ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد ہیں۔ سہولت کی خاطر ہم نے اس مسئلہ کو ن کے صرف تین اجزائے ضربی کے لئے بیان کیا ہے۔ عام صورت میں بالکل اسی قسم کا ثبوت دیا جاسکتا ہے۔ اس مسئلہ اور گزشتہ مسئلوں کی مدد سے اب ہم حسب ذیل عام نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں:-

اکائی کے ن ویں جذروں کو متعین کرنیکا سوال اس صورت میں تحویل ہوتا ہے جس میں ن مفرد عدد ہو یا مفرد عدد کسی قوت پر اٹھایا ہوا۔ (۹)

۵۳۔ لا۔ ا =۔ کی خاص اصلیں۔ شکل لا۔ ا =۔ کی ہر مساوات کی چند ایسی اصلیں ہوتی ہیں جو اسی شکل کی مگر کمتر درجہ کی مساوات کی اصلیں نہیں ہوتیں۔ اس قسم کی اصلوں کو ہم اس مساوات کی خاص اصلیں یا اکائی کے خاص ن ویں جذور کہیں گے۔ اگر ن مفرد عدد ہو تو تمام خیالی اصلیں اس قسم کی اصلیں ہوں گی۔ اگر ن = ف، جہاں ف مفرد عدد ہے تو ن سے کمتر درجہ کی کوئی ن ویں اصل مساوات لا۔ ا =۔ کی اصل ہونی چاہئے۔ کیونکہ ف کا کوئی مقسوم علیہ ف۔ ا کا بھی مقسوم علیہ ہے (سوائے خود ن کے)۔ پس ف (۱۔ ا) اصلیں ایسی ہوں گی جو ن سے کمتر درجہ کی کسی مساوات کی اصلیں نہیں ہوں گی۔ یعنی خاص اصلوں کی تعداد



اگر ایک خاص  $n$  واں جذر  $e$  دیا جائے تو ہم  $a$  کی کے باقی تمام خاص  $n$  ویں جذر معلوم کر سکتے ہیں۔

چونکہ  $e$  خاص جذر ہے اسلئے  $e^1, e^2, e^3, \dots, e^{n-1}$  مختلف  $n$

ویں جذر ہیں جیسا کہ ہم نے ابھی ثابت کیا۔ اب اگر اسی سلسلہ کا ایک جذر  $e^f$  لیا جائے جہاں  $f$   $n$  کے لحاظ سے مفرد ہے تو جذر  $e^1, e^2, e^3, \dots, e^{n-1}$  (۱-۱)  $f$   $n$   $e$  (۱۰)

سب مختلف ہیں کیونکہ  $e$  کی تو توں کو جب  $n$  سے تقسیم کیا جاتا ہے تو ہر صورت میں باقی مختلف ہوتے ہیں یعنی عددوں کا سلسلہ  $1, 2, 3, \dots, n-1$  کسی ترتیب میں۔ پس جذریں کا یہ سلسلہ وہی ہے جو  $f$  لکھا جا چکا ہے سوائے اس کے کہ یہاں  $f$  دوسری ترتیب میں واقع ہوئی ہیں۔ ہر عدد  $f$  کے جواب میں جو  $n$  کے لحاظ سے مفرد اور اس سے چھوٹا ہو  $a$  کی کا ایک خاص  $n$  واں جذر ہے کیونکہ  $e^{nf}$  ایک کے مساوی نہیں ہو سکتا جبکہ  $m$   $n$  سے چھوٹا ہو اگر ایسا ہو سکتا تو سلسلہ میں دو اصلیں ایک کے مساوی ہوتیں اور ایسی صورت میں سلسلہ سے تمام اصلیں حاصل نہ ہو سکتیں۔ اسلئے کسی ثنائی مساوات کی جس کا درجہ  $n$  سے کم ہو  $e^f$  اصل نہیں ہو سکتی یعنی  $e^f$   $a$  کی کا خاص  $n$  واں جذر ہے۔ یہ بات متذکرہ بالا ثابت شدہ نتیجہ کے مطابق ہے کیونکہ  $n$  سے چھوٹے اور اس کے لحاظ سے مفرد

صحیح عددوں کی تعداد عددوں کی ایک معلومہ خاصیت سے  $n$  (۱)  $(\frac{1}{n})$  (۱)  $(\frac{1}{n})$  ہے جبکہ  $n = f$   $q$  اور اتنی ہی تعداد مساوات  $a = 1$  کی خاص اصولوں کی ہے جیسا کہ اوپر ثابت کیا گیا۔

## مثالیں

۱۔ لا۔ ۱ = ۰ کی خاص اصلیں متعین کرو۔

یہاں  $۲ \times ۳ = ۶$  اسلئے مساواتوں لا۔ ۱ = ۰، لا۔ ۱ = ۰ کی اصلیں مساوات لا۔ ۱ = ۰ کی اصلیں ہیں۔ اب لا۔ ۱ کو لا۔ ۱ سے تقسیم کرنے سے

لا۔ ۱ حاصل ہوتا ہے اور لا۔ ۱ کو لا۔ ۱ سے تقسیم کرنے سے لا۔ ۱ حاصل ہوتا ہے۔ اسلئے لا۔ ۱ = ۰ سے لا۔ ۱ = ۰ کی خاص اصلیں متعین ہوں گی۔

اس مساوات درجہ دوم کو حل کرنے سے

$$\frac{۳-۱-۱}{۲} = ۱ \quad ، \quad \frac{۳-۱+۱}{۲} = ۰$$

نیز چونکہ  $۱ = ۰$  سے  $۱ = ۰$

اس لئے  $۱ = ۰$

جسکی تصدیق یہ آسانی ہو سکتی ہے۔

اس لئے خاص اصلیں ہیں

$۱ = ۰$  یا  $۱ = ۰$  ،  $۱ = ۰$  یا  $۱ = ۰$

۲۔ لا۔ ۱ = ۰ کی خاص اصلوں پر بحث کرو۔

97)

چونکہ ۱۲ کے مفرد اجزائے ضربی ۲ اور ۳ ہیں اور  $\frac{۱۲}{۲} = ۶$  ،  $\frac{۱۲}{۳} = ۴$

اسلئے لا۔ ۱ = ۰ اور لا۔ ۱ = ۰ کی اصلیں لا۔ ۱ = ۰ کی اصلیں ہیں۔ اب لا۔ ۱ = ۰

کو لا۔ ۱ اور لا۔ ۱ سے تقسیم کیا جائے اور خارج قسمتوں کو صفر کے مساوی رکھا جائے

تو ہمیں دو مساواتیں لا۔ ۱ + لا۔ ۱ = ۰ اور لا۔ ۱ = ۰ حاصل ہوں گی اور یہ دونوں مساواتیں

لا۔ ۱ = ۰ کی اصلوں سے پوری ہونی چاہئیں۔ اس لئے لا۔ ۱ + لا۔ ۱ اور لا۔ ۱

کا مقسوم علیہ اعظم لیکر اس کو صفر کے مساوی رکھنے سے مساوات لا۔ ۱ + لا۔ ۱ = ۰

کی اصلیں خاص اصلیں ہوں گی۔

یہی نتیجہ حاصل ہوتا اگر ہم لا۔ ۱ اور لا۔ ۱ کے ذواضعاف اقل سے لا۔ ۱ کو

تقسیم کرتے۔ اب منکافی مساوات لا<sup>۱</sup>۔ لا<sup>۲</sup> + ۱ = کو حل کرنے سے لا<sup>۱</sup> =  $\frac{1}{3}$  پس

$$\frac{1 - 3}{2} = \left(\frac{1}{3}, \text{عم}\right) \quad \frac{1 - 3}{2} = \left(\frac{1}{3}, \text{عہ}\right)$$

مساوات لا<sup>۱</sup>۔ ۱ = کی چار خاص اصلیں ہیں جہاں عہ اور عم دو خاص اصلیں ہیں۔

اب ہم ان چار خاص اصلوں کو ان میں سے کسی ایک اصل عہ کی قوم میں بیان کرتے ہیں۔

چونکہ عہ +  $\frac{1}{3}$  + عم +  $\frac{1}{3}$  = یعنی (عہ + عم) (۱ +  $\frac{1}{3}$ ) = ۰

اس لئے ہم عہ عم = - لیتے ہیں (جو عہ اور عم کی قیمتوں کے مطابق ہے)

اور چونکہ لا<sup>۱</sup> + ۱ = کی اصلیں عہ اور عم ہیں اسلئے عہ = - ۱ اور عہ = -  $\frac{1}{3}$  = عم۔

یعنی اصلیں عہ عم،  $\frac{1}{3}$ ،  $\frac{1}{3}$  سلسلہ عہ عہ عہ سے بیان ہو سکتی ہیں کیونکہ عہ = - ۱۔

نیز عہ کی بجائے عہ عہ عہ رکھنے اور عہ کے قوت نماؤں سے ۱۲ کے ضعفوں کو خارج کرنے سے ہمیں حسب ذیل سلسلے بشمول سلسلہ بالائینکے

عہ عہ عہ عہ  
عہ عہ عہ عہ  
عہ عہ عہ عہ  
عہ عہ عہ عہ

جہاں ہر صف اور ہر قطار میں وہی اصلیں تکرار پاتی ہیں، صرف اچھی ترتیب بدلی ہوئی اس لئے ہم نے یہ ثابت کر دیا کہ یہ خاصیت چار اصلوں میں سے کسی ایک اصل سے مخصوص نہیں اور یہ ظاہر ہے کہ ۱، ۵، ۱۱ ایسے عدد ہیں جو ۱۲ کے لحاظ سے مفرد اور اس سے چھوٹے ہیں اور یہ بات اس عام نتیجہ کے مطابق ہے جس کو ہم نے

اس باب میں ثابت کیا ہے۔ لا<sup>۱</sup> = ۱۔ کی سب اصلیں اسکی چار خاص اصولوں سے ملے  
 ع<sup>۱</sup> ع<sup>۲</sup> ع<sup>۳</sup> ع<sup>۴</sup> میں سے کسی ایک کی قوتوں سے حسب ذیل حاصل ہو سکتی ہیں:-

$$\begin{array}{l} \text{ع}^1 \text{ع}^2 \text{ع}^3 \text{ع}^4 = \text{ع}^1 \text{ع}^2 \text{ع}^3 \text{ع}^4 \\ \text{ع}^1 \text{ع}^2 \text{ع}^3 \text{ع}^4 = \text{ع}^1 \text{ع}^2 \text{ع}^3 \text{ع}^4 \\ \text{ع}^1 \text{ع}^2 \text{ع}^3 \text{ع}^4 = \text{ع}^1 \text{ع}^2 \text{ع}^3 \text{ع}^4 \\ \text{ع}^1 \text{ع}^2 \text{ع}^3 \text{ع}^4 = \text{ع}^1 \text{ع}^2 \text{ع}^3 \text{ع}^4 \end{array}$$

۳۔ ثابت کرو کہ لا<sup>۱</sup> = ۱۔ کی خاص اصلیں مساوات

$$\text{لا}^1 - \text{لا}^2 + \text{لا}^3 - \text{لا}^4 = ۱ = ۰$$

(98)

کی اصلیں ہیں۔

۴۔ ثابت کرو کہ مثال مابقی کی آٹھ اصلیں مساوات لا<sup>۱</sup> + لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۳</sup> = ۱۔ کی دو  
 اصولوں کو مساوات

$$\text{لا}^1 + \text{لا}^2 + \text{لا}^3 + \text{لا}^4 = ۱ = ۰$$

کی چار اصولوں سے ضرب دینے سے حاصل ہو سکتی ہیں۔

۵۔ بارہویں درجہ کی مساوات بناؤ جس کی اصلیں لا<sup>۱</sup> = ۱۔ کی خاص اصلیں  
 ہوں اور اسکو چھٹے درجہ کی مساوات میں تحویل کرو۔

$$\text{جواب :- لا}^1 - \text{لا}^2 + \text{لا}^3 - \text{لا}^4 + \text{لا}^5 - \text{لا}^6 + \text{لا}^7 - \text{لا}^8 + \text{لا}^9 = ۰$$

۵۴۔ شنائی مساواتوں کو دائری تفاعلوں کے ذریعہ حل کرنا۔

ہم عام سے عام شنائی مساوات

$$\text{لا}^1 = ۱ + \text{ب} - \text{ا}$$

لیتے ہیں جہاں ا اور ب حقیقی مقادیر ہیں۔

$$\text{رض کرو کہ } ۱ = \text{ا} + \text{جم ع} - \text{ب} = \text{ا} + \text{ب} - \text{ا} \text{ جب ع}$$

$$\text{تو } \text{لا}^1 = \text{ا} + (\text{جم ع} + \text{ا} - \text{ب}) \text{ جب ع}$$

$$\text{اب اگر } \text{ر} (\text{جم ط} + \text{ا} - \text{ب}) \text{ جب ط}$$



اس مساوات کی ایک اصل ہوتو ڈیمو امٹر کے مسئلہ سے

۱۰ (جم ن طه + ا - ا ج پ ن طه) = ۷ (جم عه + ا - ا ج ب عه)

اور اسلئے

۱ حجم ن ط = ص حجم ع

رجب بن طه = کاجب عہ

ان کا مربع لیکر جمع کرنے سے

۲۵ = ۵۲ مر۲ یعنی ۵ = ۲۵ مر

جہاں ہم راور سے دونوں کو مثبت لیتے ہیں کیونکہ زیر بحث جملوں میں اُس جزو ضربی کو ہمیشہ مثبت لیا جاسکتا ہے جس میں زاویہ واقع ہوتا ہے۔

جس

جمن طه = جم عہ جب ن طه = جب عہ

اور اس لئے

ن ط ه = ح م + م ک π

جہاں ک کوئی صحیح عدد ہے۔ پس مفروضہ ن میں اصل کی عام شکل ہوگی

۱۷۳ (جم  $\frac{ع+ک۲}{ن} + ۱۰ - ۱$  جب  $\frac{ع+ک۲}{ن}$ )

اس جلد میں ک کو عددوں کے سلسلہ - ۵۵ اور + ۵۵ کے درمیان کوئی  
ن منفصلہ قیمتیں دینے سے تمام ناویں اصلیں حاصل ہونگی اور یہ  
اصلیں تعداد میں ن سے زیادہ نہیں ہونگی کیونکہ وہ ایک دور پورا ہونے کے  
بعد تکرار پائیں گی۔

نویں اصل کے مجاہد کو ہم شکل

$$\{ \frac{1}{n} (جم ع) + \frac{1}{n} (اجب ع) \} \{ \frac{1}{n} (جم ع) + \frac{1}{n} (اجب ع) \}$$

میں کہہ سکتے ہیں۔ اب اگر ہم فرض کریں کہ  $a = 1$  اور  $e = 1$ ۔ تو مساوات

لا = ۱ + ب - ۱ - ۱ ہو جائیگی لا = ۱ + ۱ - ۱ - ۱ اسلئے ۱ + ۱ - ۱ - ۱  
یا اکائی کے ن دیں جذر کی سام شکل ہوگی

$$\text{جم } \frac{۲}{ن} - ۱ + ۱ - ۱ \text{ جب } \frac{۲}{ن}$$

اگر ہم ک کو کوئی متعین قیمت دیں مثلاً صفر نو

$$\frac{۲}{ن} - ۱ + ۱ - ۱ \text{ (جم } \frac{۲}{ن} - ۱ \text{ جب } \frac{۲}{ن})$$

۱ + ب - ۱ - ۱ کا ایک ن و اں جذر ہوگا۔

اس لئے پچھلے ضابطہ سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ کسی خیالی مقدار کے

تمام ن دیں جذر ان میں سے کسی ایک جذر کو اکائی کے ن دیں  
جذروں سے ضرب دینے سے حاصل ہوتے ہیں۔

ثنائی مساواتوں

$$\text{لا} = ۱ + ب - ۱ - ۱ \text{ اور } \text{لا} = ۱ - ب - ۱ - ۱$$

کو ایک ساتھ لینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ سہ رقمی

$$\text{لا} = ۱ - ب - ۱ - ۱ \text{ جم } ۱ - ب - ۱ - ۱ + ۱$$

کے اجزائے ضربی

$$\left\{ \frac{۲}{ن} - ۱ + ۱ - ۱ \pm \frac{۲}{ن} - ۱ + ۱ - ۱ \right\}$$

ہیں جہاں ک قیمتیں ۱، ۲، ۳، .... (ن - ۱) اختیار کرتا ہے۔

مثالیں

۱۔ مساوات لا = ۱ - ۱ کو حل کرو۔

اسکو لا۔ ۱ سے تقسیم کر دو تو یہ تنکافی مساوات کی معیاری شکل میں تحویل ہو جائیگی۔  
پھر  $y = 1 + \frac{1}{x}$  رکھنے سے یہی

ی + ی<sup>۲</sup> - ی<sup>۲</sup> - ی<sup>۲</sup> = ۱  
ماہل ہو گا جس کو حل کرنے سے دی ہوئی مساوات کا حل مل جائیگا۔

۲ - (۱ + ۱) - لا - اکو اجزائے ضربی میں تحویل کرو۔

جواب :- لا (۱ + لا) (۱ + لا + لا + لا)<sup>۲</sup>  
۳ - وہ مساوات معلوم کرو جس کے حل پر ثنائی مساوات لا - ۱ = ۰ کا حل منحصر ہے۔

جواب :- ی + ی<sup>۲</sup> - ی<sup>۲</sup> - ی<sup>۲</sup> - ی<sup>۲</sup> + ی<sup>۲</sup> + ی<sup>۲</sup> = ۰  
۴ - اگر ثنائی مساوات کو (لا - ۱) لا + ۱ یا لا - ۱ سے تقسیم کر کے تنکافی مساوات کی معیاری شکل میں تحویل کیا جائے تو ثابت کرو کہ تحویل شدہ مساوات کی سب اصلیں خیالی ہوتی ہیں۔ (دیکھو صفحہ ۴۲) مثالیں ۱۵، ۱۶۔

۵ - اگر اس تحویل شدہ مساوات کو  $y = 1 + \frac{1}{x}$  رکھ کر تحویل کیا جائے تو ثابت کرو کہ ی میں مساوات کی سب اصلیں حقیقی ہوں گی اور وہ ۲ اور ۲ کے درمیان واقع ہوں گی۔

کیونکہ لا میں دی ہوئی مساوات کی اصلیں جم + ح + لا - ۱ جب ح شکل کی ہوں گی (دیکھو دفعہ ۵۴) - پس لا +  $\frac{1}{x}$  کی شکل ۲ جم + ح ہوگی اور اسکی قیمت حقیقی اور ۲ - ۲ کے درمیان ہوگی۔

۶ - ثابت کرو کہ مساوات ذیل تنکافی ہے۔ اس کو حل کرو:-

$$۴(لا - لا + ۱) - ۲(لا - لا - ۱) = ۰$$

جواب :- اسکی اصلیں ۲، ۲،  $\frac{1}{۲}$ ،  $\frac{1}{۲}$ ، ۱، ۱ ہیں۔

۷ - مساوات لا - ۱ = ۰ کی سب اصلیں معلوم کرو۔

اسکا حل تین کجی مساواتوں

$$لا - ۱ = ۰، لا - ۲ = ۰، لا - ۳ = ۰$$



ثابت کرو کہ

۱۲ — ثابت کرو کہ کبھی مساوات فوراً متکافی شکل میں تحویل ہو سکتی ہے اگر اسکے سروں کے درمیان دفعہ ۲۴ مثال ۱۸ کا ربط موجود ہو۔

۱۳ — ثابت کرو کہ چار درجہ فوراً متکافی شکل میں تحویل ہو سکتا ہے اگر سروں کے درمیان دفعہ ۲۴ مثال ۲۲ کا ربط موجود ہو۔

۱۴ — وہ کبھی بناؤ جسکی اصلیں ہوں

$$عہ + عہ^۲ + عہ^۳ + عہ^۴ + عہ^۵$$

جہاں عہ، مساوات لا۔۱ = کی ایک خیالی اصل ہے۔

جواب :- لا۔۱ + لا۔۲ = ۱۔۰

جب اس کبھی کی اصلیں معلوم ہو جاتی ہیں تو مساوات لا۔۱ = کا حل دو درجہ مساواتوں کے ذریعہ مکمل کیا جاسکتا ہے۔ کیونکہ فرض کرو کہ کبھی کی تین اصلیں لا۔۱، لا۔۲، لا۔۳ تب لا۔۱ + لا۔۲ = کی اصلیں عہ اور عہ^۲، لا۔۲ + لا۔۳ = کی اصلیں عہ^۳ اور عہ^۴ اور لا۔۱ + لا۔۲ + لا۔۳ = کی اصلیں عہ^۵ اور عہ^۶ ہوں گی۔ یہ دیکھ لینا آسان ہے کہ کبھی کی سب اصلیں حقیقی ہیں اور ان کو تقریبی طور پر دسویں باب کے طریقوں کے ذریعہ معلوم کیا جاسکتا ہے۔

۱۵ — وہ کبھی بناؤ جسکی اصلیں ہوں

$$عہ + عہ^۲ + عہ^۳ + عہ^۴ + عہ^۵ + عہ^۶ + عہ^۷ + عہ^۸ + عہ^۹ + عہ^{۱۰}$$

جہاں عہ، مساوات لا۔۱ = کی ایک خیالی اصل ہے۔

جواب :- لا۔۱ + لا۔۲ + لا۔۳ = ۱۔۰

گزشتہ مثال کی طرح یہاں بھی جب کبھی کی اصلیں (جو سب حقیقی ہیں) معلوم ہو جاتی ہیں تو متکافی مساوات لا۔۱ = کا حل دو درجہ مساواتوں کے ذریعہ مکمل کیا جاسکتا ہے۔ فرض کرو کہ کبھی کی اصلیں لا۔۱، لا۔۲، لا۔۳ ہیں۔ اب یہ دیکھ لینا آسان ہے کہ لا۔۱ + لا۔۲ + لا۔۳ = کی اصلیں عہ + عہ^۲ + عہ^۳ اور عہ^۴ + عہ^۵ + عہ^۶ اور عہ^۷ + عہ^۸ + عہ^۹ اور عہ^{۱۰} + عہ^{۱۱} + عہ^{۱۲} ہیں۔ جب



(Primitive root) میں یہ خاصیت پائی جاتی ہے کہ اگر اسکو صفر سے ن۔۲ تک متواتر قوتوں میں اٹھایا جائے اور ہر صورت میں ن سے تقسیم کیا جائے تو ن۔۱ باقی سب کے سب مختلف ہوتے ہیں۔ (Serret's Cours d'Algebre Superieuro vol. II) کسی مفرد عدد کی ایسی ابتدائی اصلیں متعدد ہوتی ہیں مثلاً ۱۳ کی ۲، ۶، ۷ اور ۱۱، ۱۲ کی ۳، ۵، ۶، ۷، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳ گلاس خیالی اصلوں کو اس طرح مرتب کرتا ہے کہ ان میں سے کسی ایک اصل ۱ کے متواتر قوت نما، صفر سے ن۔۲ تک ن کی کسی ابتدائی اصل کی متواتر قوتیں ہوں۔ مثلاً ۱۳ کی چھوٹی سے چھوٹی ابتدائی اصل لی جائے اور ۲ کی متواتر قوتوں کو ۱۳ سے تقسیم کیا جائے تو ہمیں باقیوں کا حسب ذیل سلسلہ ملیگا۔

اور اس لئے یہ باقی ترتیب کے ساتھ ع کے متواتر قوتیں ہیں جبکہ قوتوں کو جو ۱۳ سے متجاوز ہوں مساوات ع کے ذریعہ تحویل کر لیا گیا ہو۔ اگر ع کی چھوٹی سے چھوٹی ابتدائی اصل کے ساتھ یہی سلوک کیا جائے تو ہمیں باقیوں کا حسب ذیل سلسلہ ملتا ہے۔

ان سلسلوں کا اوپر کے مفروضات کے ساتھ مقابلہ کیا جائے تو یہ معلوم ہوگا کہ پہلی صورت میں (یعنی  $n = 13$ ) بارہ اصلیں چار چار کے تین مجموعوں میں منقسم ہوتی تھیں اور دوسری صورت میں سولہ اصلیں آٹھ آٹھ کے دو مجموعوں میں۔ کسی صورت میں تقسیم کا طریقہ  $n = 1$  کے اجزائے ضربی کی نوعیت پر منحصر ہوتا ہے اور عام صورت میں یہ بتانا مشکل نہیں کہ اس قسم کے کسی دو گروہوں کا حاصل ضرب دو یا اس سے زیادہ کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے جیسا کہ طالب علم کو اوپر کی مخصوص مثالوں سے واضح ہو گیا ہوگا۔

(۱) کسی خاص صورت میں گاس کا طریقہ استعمال کرنے کے لئے صرف چھوٹی سے چھوٹی ابتدائی اصل کا معلوم ہونا ضروری ہے اور اس کو بغیر کسی مشکل کے آزمائش سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔

یہ یاد رہے کہ تین سادہ ترین مفرد عددوں ۲، ۳، ۵ میں سے کوئی نہ کوئی ۱۱

چھوٹے ہر مفرد عدد کی ابتدائی اصل ہے سوائے ۴ اور ۱ کے جن کی چھوٹی سے چھوٹی ابتدائی اصلیں علی الترتیب ۶ اور ۷ ہیں۔ تمام ابتدائی اصلوں کو معلوم کرنے کے طریقے سیرے کی تذکرہ بالا تصنیف میں دئے گئے ہیں۔

۱۷۔ آزمائش سے ۱۹ کی چھوٹی سے چھوٹی ابتدائی اصل معلوم کرو۔ اور اسلئے بتاؤ کہ مثلاً ۱۹۔ ۱ = کو کس طرح حل کیا جاسکتا ہے۔

یہ آسانی معلوم ہو جاتا ہے کہ ۲ چھوٹی سے چھوٹی ابتدائی اصل ہے اور ۱۹ سے تقسیم کرنے کے بعد جو باقی حاصل ہوتے ہیں وہ اس دوران میں معلوم ہو جاتے ہیں۔ چونکہ ۱۸ = ۲ × ۳ اسلئے حل کبھی اور دو درجی مساواتوں پر منحصر ہو گا۔ پہلا کبھی ایسی مساوات بنانے سے معلوم ہو گا جسکی اصلیں ہیں

$$\begin{aligned} & ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۸ \\ & ۲ + ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ \\ & ۳ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۸ \end{aligned}$$

۱۸۔ ثابت کرو کہ ان ثنائی مساواتوں میں سے جنکا درجہ ایک مفرد عدد ہو اور حل دو درجی مساواتوں پر منحصر ہو ۱۷۔ ۱ = کے بعد کم سے کم درجہ والی مساوات ۲۵۷۔ ۱ = ہے۔

۲۵۷ کے بعد آنے والا مفرد عدد جو اس شرط کو پورا کرے کہ ۱ = ۲ (جہاں ک صحیح عدد ہے) ۶۵۵۳۷ ہے۔ اسلئے ہمیں ایسے عددوں کا سلسلہ ۵۳، ۲۵۷، ۶۵۵۳۷، ..... ملے گا۔ گاس (Disquisitiones Arithmeticae) دفعہ ۳۶۵ میں لکھتا ہے کہ ہندی افعال سے دائرہ کون مساوی حصوں میں تقسیم کرنا یا ان ضلعوں والا منظم کثیر الاضلاع بنانا ممکن ہے جبکہ ان انہیں سے کوئی قیمت اختیار کرے۔

۱۹۔ اگر مساوات

$$۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۱۰۰ = ۱۰۰ + ۹۹ + ۹۸ + \dots + ۱$$

کی اصلیں عم، عم، عم، ..... ہوں تو وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں ہوں

$$۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۱۰۰ = ۱۰۰ + ۹۹ + ۹۸ + \dots + ۱$$







جواب :- عہ + ہ + جہ - د عہ + جہ (عہ - ہ جہ)

۲۵ - وہ چار درجہ سادات بناؤ جس کی اصلیں ہوں

عہ + ۲ عہ + ۲ عہ + ۲ عہ + ۲ عہ + ۲ عہ + ۲ عہ

جہاں لا - ۱ = - کی ایک خیالی اصل عہ ہے -

جواب :- لا + ۳ لا - لا - لا + ۳ لا + ۱ = -



(105)

## پچھٹا باب

### کعبی اور چار درجی کا جبری حل

۵۵۔ مساواتوں کا جبری حل۔ کعبی اور چار درجی مساواتوں کے حل پر بحث کرنے سے پیشتر ہم چند تمہیدی باتیں بیان کرینگے تاکہ طالب علم ان عام اصولوں سے اچھی طرح واقف ہو جائے جن پر ان مساواتوں کا جبری حل منحصر ہوتا ہے۔ اس مقصد کو پیش نظر رکھ کر ہم اس دفعہ میں دو درجی مساوات (مساوات درجہ دوم) کے حل کے تین طریقے درج کرینگے اور ساتھ ہی یہ بھی بیان کرتے جائینگے کہ کس طرح ان طریقوں کو کعبی اور چار درجی مساواتوں کا جبری حل حاصل کرنے میں وسیع کیا جاسکتا ہے۔ بعد کے دفعات میں ہم ان اصولوں کی پوری تشریح کرینگے۔

(۱) حل کا پہلا طریقہ۔ اصل کیلئے عام شکل  $F + MaQ$  فرض کرتے

چونکہ جملہ  $F + MaQ$  کی دو اور صرف دو قیمتیں ہیں جبکہ جذر المربع کو دوہری علامت (+) کے ساتھ لیا جاتا ہے اسلئے دو درجی کی اصل کے لئے ایسے جملہ کو فرض کرنا بالکل درست ہے۔ اسلئے  $La = F + MaQ$  رکھ کر اس کو منطق بنانے سے ہمیں حاصل ہوگا

$$La^2 - 2Fa + F^2 - Q^2 = 0$$

اب اگر یہ دی ہوئی دو درجی مساوات

$$۱ + ف + لا + ق = ۰$$

کے ساتھ متماثل ہو تو

$$۲ = ف - ف' - ق - ق'$$

$$\frac{۲}{۲} = \frac{ف + ف' + ق + ق'}{۲} = لا = ف + ف' + ق + ق'$$

جو دی ہوئی مساوات کا حل ہے۔

کعبی مساوات کی صورت میں ہمیں معلوم ہو گا کہ

$$۱ + ف' + لا + ق' + ق = ۰ \text{ اور } ۱ + ف + لا + ق = ۰$$

(106) دونوں شکلیں ایسی ہیں جو اصل کو تعبیر کرنے میں استعمال ہو سکتی ہیں کیونکہ ان جملوں کی تین اور صرف تین قیمتیں ہیں جبکہ جذرا لکعبوں کو عام سے عام صورت میں لیا جائے۔ چار درجی مساوات کی صورت میں ہمیں یہ معلوم ہو گا کہ

$$۱ + ف + لا + ق + ق' + ق'' + ق''' = ۰$$

دونوں شکلیں ایسی ہیں جو اصل کو تعبیر کرنے میں استعمال ہو سکتی ہیں کیونکہ ان جملوں سے لا کی چار اور صرف چار قیمتیں حاصل ہوتی ہیں جبکہ جذرا لکعبوں کو دوہری علامت لگا دی جائے۔

(۲) حل کا دوسرا طریقہ۔ اجزائے ضربی میں تحویل کرنے سے۔

فرض کرو کہ دو درجی لا + ف + لا + ق + ق' کو مفرد اجزائے ضربی میں تحویل کرنا مطلوب ہے۔ اس مقصد کے لئے ہم اسکو شکل

$$۱ + ف + لا + ق + ق' + ط = ۰$$

میں رکھتے ہیں اور ط کو اس طرح متعین کرتے ہیں کہ

$$۱ + ف + لا + ق + ق' + ط = ۰$$

کامل مربع ہو سکے۔ اب یہ جملہ کامل مربع ہو گا اگر

$$\text{طہ} + \text{ق} = \frac{\text{ف}^۲}{۴} \text{ یعنی طہ} = \frac{\text{ف}^۲ - ۴\text{ق}}{۴}$$

اس قیمت کو طہ کی بجائے درج کیا جائے تو

$$\text{لا} + \text{ف} + \text{لا} + \text{ق} = (\text{لا} + \frac{\text{ف}}{۲}) - (\frac{\text{لا} + \text{ف} - ۴\text{ق}}{۲})$$

پس ہم نے دو درجی کو شکل ع۔ و<sup>۲</sup> میں تحویل کر دیا جس کے مفرد اجزائے ضربی ع + و اور ع - و ہیں۔

اسی طرح ہم کعبی کو شکل

$$(\text{ل} + \text{لا} + \text{م})^۲ - (\text{ل} + \text{لا} + \text{م}^۳) \text{ یا ع۔ و}^۳$$

میں تحویل کرینگے اور اسکا حل مساداتوں ع - و = ع' - و' = ع - و = ع' - و =۔ سے حاصل کریں گے۔

یہ بھی دکھایا جائیگا کہ چار درجی کو ایک کعبی مسادات کے حل کرنے سے سیکھوں

$$(\text{ل} + \text{لا} + \text{م} + \text{ن})^۲ - (\text{ل} + \text{لا} + \text{م} + \text{ن}^۲) \\ (\text{لا} + \text{ف} + \text{لا} + \text{ق}) - (\text{لا} + \text{ف} + \text{لا} + \text{ق}^۲)$$

(107) میں سے کسی ایک میں تحویل کیا جاسکتا ہے۔ اور پھر دو دو درجی مساداتوں کو حل کرنے سے چار درجی کا مکمل حل معلوم کیا جاسکتا ہے یعنی پہلی صورت میں ل + لا + م + لا + ن = ± (ل + لا + م + ن) کو اور دوسری صورت میں لا + ف + لا + ق = ق' اور لا + ف + لا + ق = کو حل کرنے سے دئے ہوئے چار درجی کا مکمل حل معلوم ہوتا ہے۔

(۳) حل کا تیسرا طریقہ۔ اصولوں کے متشاکل تفاعلوں سے۔

دو درجی مسادات لا + ف + لا + ق = پر غور کر جس کی اصلیں

عہ اور بہ ہیں۔ اصولوں کے درمیان ربط ملینگے

$$\text{عہ} + \text{بہ} = -\text{ف}$$

$$\text{عہ بہ} = \text{ق}$$

اگر ہم ان مساواتوں سے  $ع$  اور  $بہ$  کو متعین کرنے کی کوشش کریں تو ہم ابتدائی مساوات پر پہنچ جائیں گے (دیکھو دفعہ ۲۴)۔ لیکن اگر ہمیں اصلوں اور سروں کے درمیان کوئی اور ربط معلوم ہو جائے جو  $ل$   $ع$   $م$   $بہ$   $ف$  (ف' ق) کی شکل کا ہو تو ہم آسانی سے  $ع$  اور  $بہ$  کو اس مساوات اور مساوات  $ع$   $بہ$  =  $ف$  سے معلوم کر سکیں گے۔

دو درجی کی صورت میں مطلوبہ مساوات معلوم کرنے میں کوئی وقت نہیں ہے کیونکہ صریحاً

$$(ع - بہ) = ۲ = ف - ۴ ق$$

$$اور اسلئے \quad ع - بہ = ۲ = ف - ۴ ق$$

کعبی مساوات  $ل$   $ا$   $ف$   $ل$   $ا$   $ق$   $ل$   $ا$   $م$  = کی صورت میں اصلوں  $ع$   $بہ$   $جہ$  کو معلوم کر نیچے لئے مساوات  $ع$   $بہ$   $جہ$  =  $ف$  کے علاوہ  $ل$   $ع$   $م$   $بہ$   $ن$   $جہ$  =  $ف$  (ف' ق' م) کی شکل کی دو مساواتیں مطلوب ہوتی ہیں۔ آئندہ ہم ثابت کرینگے کہ ایک دو درجی مساوات کو حل کرنے سے تفاعلوں

( $ع$   $بہ$   $جہ$  +  $س$   $جہ$ ) ( $ع$   $بہ$   $س$   $جہ$  +  $س$   $جہ$ ) کو کعبی کے سروں کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے اور جب ان تفاعلوں کی قیمتیں معلوم ہوں تو کعبی کی اصلیں آسانی سے معلوم کیجا سکتی ہیں۔

چار درجی مساوات

$ل$   $ا$   $ف$   $ل$   $ا$   $ق$   $ل$   $ا$   $م$   $س$  = کی صورت میں اصلوں  $ع$   $بہ$   $جہ$   $ضہ$  کو معلوم کر نیچے لئے مساوات  $ع$   $بہ$   $جہ$   $ضہ$  =  $ف$  کے علاوہ

$ل$   $ع$   $م$   $بہ$   $ن$   $جہ$   $ضہ$  =  $ف$  (ف' ق' م' س) کی شکل کی تین مساواتوں کی ضرورت پڑیگی۔ دفعہ ۶۶ میں یہ ثابت کیا جائیگا کہ حسب ذیل تین تفاعلوں

(بہ + جہ - عہ - ضہ) <sup>۲</sup> (جہ + عہ - ضہ - بہ) <sup>۱</sup> (عہ + بہ - جہ - ضہ) <sup>۲</sup>  
کو ایک کبھی مساوات کے حل کرنے سے سروں کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے  
اور جب انہی قیمتیں معلوم ہو جاتی ہیں تو چار درجہ مساوات کی اصلیں فوراً حاصل  
ہو سکتی ہیں۔

۵۶۔ کعبی مساوات کا جبری حل۔ فرض کرو کہ عام کعبی مساوات

$$= \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

کوشش

یٰۚ + ۛ + ی + گ = ۛ

میں رکھا گیا ہے جہاں

ی = ۱ لا + ب'ھ = ۱ ج - ب'اگ = ۱ د - ۳ ب ج + ۲ ب'۳

(دفتر ۳۶)

اس مساوات کو حل کر نیکی لئے فرض کرو

$$y = \overline{a} + \overline{b}$$

اس کا مکعب لینے سے

$$١ = ف + ق + ۳ف + ۲ق (ف + ق)$$

اس لئے

ی۔۳۔ سبکدہا ی۔ (ف + ق) = .

اب سروں کا مقابلہ کرنے سے

ہفت ہفت = ہ، ف + ق = گ

ان مساواتوں سے حاصل ہوگا

۱۔ اصل کو کارڈن کامل کہتے ہیں۔ دیکھو نوٹ ۱ اس جلد کے ختم پر۔



$$ف = \frac{۱}{۲}(-گ + \sqrt{۴گ^۲ + ۴}) \quad ق = \frac{۱}{۲}(-گ - \sqrt{۴گ^۲ + ۴})$$

(109) اور  $\frac{۱}{۲}(-گ + \sqrt{۴گ^۲ + ۴})$  کی بجائے اسکی قیمت  $\frac{۱}{۲}(-گ - \sqrt{۴گ^۲ + ۴})$  درج کرنے سے

$$ی = \frac{۱}{۲}(-گ + \sqrt{۴گ^۲ + ۴}) + \frac{۱}{۲}(-گ - \sqrt{۴گ^۲ + ۴})$$

اور یہ مساوات

$$۰ = ی + ۳ھ ی + گ = ۰$$

کا جبری حل ہے۔ یہ یاد رہے کہ اگر ف کی بجائے ق رکھ دیا جائے تو ی کی یہ قیمت نہیں بدلتی کیونکہ ایسا کرنے سے صرف رقوموں کا آپس میں تبادلہ ہوتا ہے۔

نیز چونکہ  $\frac{۱}{۲}(-گ + \sqrt{۴گ^۲ + ۴})$  کی تین قیمتیں  $\frac{۱}{۲}(-گ + \sqrt{۴گ^۲ + ۴})$ ،  $\frac{۱}{۲}(-گ - \sqrt{۴گ^۲ + ۴})$  ہیں جو ان میں سے کسی ایک کو اکائی کے تین جذور الکعبوں سے ضرب دینے سے حاصل ہوتی ہیں اسلئے ی کی تین اور صرف تین قیمتیں حاصل ہوتی ہیں یعنی

$$\frac{۱}{۲}(-گ + \sqrt{۴گ^۲ + ۴})، \frac{۱}{۲}(-گ - \sqrt{۴گ^۲ + ۴})، \frac{۱}{۲}(-گ + \sqrt{۴گ^۲ + ۴})$$

ان قیمتوں کی ترتیب صرف ف کے منتخب شدہ جذور الکعب کی بموجب بدلتی ہے۔ اب اگر ی کی بجائے اس کی قیمت  $\frac{۱}{۲}(-گ - \sqrt{۴گ^۲ + ۴})$  رکھ دیا جائے تو

$$۰ = ب + ۳ا ب + \frac{۱}{۲}(-گ - \sqrt{۴گ^۲ + ۴})$$

(جہاں ف کی قیمت وہ ہے جو سروں کی رقوم میں معلوم کی گئی ہے) اور کبھی مساوات  $\frac{۱}{۲}(-گ + \sqrt{۴گ^۲ + ۴}) + \frac{۱}{۲}(-گ - \sqrt{۴گ^۲ + ۴}) = ۰$

کا مکمل جبری حل ہے۔ اس میں جذور الکعب اور جذور المربع عام سے عام شکل میں

لئے گئے ہیں۔

۵۔ عددی مساواتوں پر استعمال۔ اگر کعبی کے سر دئے ہوئے عدد ہوں

تو کعبی کا حل جو ہم نے اوپر حاصل کیا ہے دو درجہ جی کے حل کے برخلاف کوئی اعلیٰ

قیمت نہیں رکھتا حالانکہ جبری حل کے لحاظ سے یہ حل بالکل مکمل ہے۔  
کیونکہ جب کعبی کی اصلیں سب کی سب حقیقی ہوں تو گ<sup>۱</sup> + ہم<sup>۲</sup> = -ک<sup>۳</sup>  
جو لازماً منفی عدد ہے (دیکھو دفعہ ۳۳) اور ف اور ق کی بجائے انکی قیمتیں

$$\frac{1}{2}(-گ \pm گ - ۱۲ - ۱)$$

ضابطہ ۲۴۔ آیت ۱۲ درجہ بجائیں تو کعبی کی اصل کے لئے ہمیں ذیل

(no)

جملہ نیکارے۔

$$\left( \frac{-گ + ک - ۱۲ - ۱}{۲} \right) + \left( \frac{-گ - ک - ۱۲ - ۱}{۲} \right)$$

اب ایسے منفی عددوں کا جذر الکعب نکالنے کے لئے کوئی عام حسابی  
عمل موجود نہیں ہے اور اسلئے جہاں تک کہ حسابی عمل کا تعلق ہے یہ ضابطہ نیکارہ ہے۔  
لیکن جب کعبی کی اصلوں کا ایک زوج خیالی ہو تو ضابطہ

$$\left( \frac{-گ + ۱۲گ + ۲۰۰}{۲} \right) - \left( \frac{-گ - ۱۲گ + ۲۰۰}{۲} \right)$$

سے ایک عددی قیمت حاصل ہو سکتی ہے کیونکہ اس صورت میں گ + ۱۲گ + ۲۰۰  
مثبت ہے۔ لیکن یہ عمل بھی عددی کعبی کی حقیقی اصل معلوم کر نینے لئے بے سود ہے۔  
پہلی صورت میں یعنی جب کعبی کی سب اصلیں حقیقی ہوں تو اصلوں کی  
عددی قیمتیں معلوم کر نیکے لئے ہم علم مثلث کا استعمال جب طریقہ ذیل کر سکتے ہیں۔  
فرض کرو ۲ گ + جم = -ک اور ۲ گ + جب = -ک

$$ف = ۱۲ - ۱، ق = ۱۲ - ۱$$

تو

نیز مس فہ =  $\frac{ک}{۲}$ ، اور  $ص = \frac{۱}{۲}(ک + گ) = \frac{۱}{۲}(ھ - ۳)$

اور چونکہ  $س = جم = \frac{۲۲}{۳} \pm ۱ - ۱$  جب  $\frac{۲۲}{۳} = ۱ - ۱$  تو  $\frac{۲۲}{۳} = ۱ - ۱$   
اس لئے کعبی

$$۱ + ۲ھ + ی = گ = ۰$$

کی تین اصلیں

۱)  $۱ + ۲ھ + ی = گ$ ، ۲)  $۱ + ۲ھ + ی = گ$ ، ۳)  $۱ + ۲ھ + ی = گ$   
ہو جاتی ہیں

$$۲ - (ھ - ۲) جم = \frac{۲۲}{۳} \pm ۱$$

ان ضابطوں سے کعبی کی اصولوں کی عددی قیمتیں جیو ب اور جیو ب الہام کی جدول کے ذریعہ معلوم ہو سکتی ہیں۔ یہ طریقہ بھی علی طور پر کچھ آسان نہیں اور عام طور پر حقیقی اصولوں کو حسابی طریقہ سے محسوس کر نیچے لئے ان طریقوں کو استعمال کرنا چاہئے جو آئندہ دسویں باب میں بیان کئے جائینگے۔

۵۸۔ کعبی کو دو مکعبوں کے فرق کی شکل میں بیان کرنا۔ فرض کر دو کہ

دئے ہوئے کعبی

$$۱ + ۲ب + ۳ج + ۴د = ف (لا)$$

کو شکل

$$۱ + ۲ھ + ی = گ$$

میں رکھا گیا ہے جہاں  $ی = ۱ + لا + ب$

اب فرض کرو

$$۱ + ۲ھ + ی = گ = \frac{۱}{۲} (۱ + ۲ھ + ی) - (۱ + ۲ھ + ی) = \dots (۱)$$

جہاں مہ اور نہ دریافت شدنی مقداریں ہیں۔ اس متانکہ کی بائیں جانب کے جملہ کو مختصر کرو تو وہ ہو جائیگا

$$۳ - ۳ = ۰ \quad ۳ - ۳ = ۰ \quad ۳ - ۳ = ۰$$

سرور کا مقابلہ کرنے سے

$$۳ - ۳ = ۰ \quad ۳ - ۳ = ۰ \quad ۳ - ۳ = ۰$$

$$\frac{۳}{۳} = ۱ \quad \frac{۳}{۳} = ۱ \quad \frac{۳}{۳} = ۱$$

$$۳ - ۳ = ۰ \quad ۳ - ۳ = ۰ \quad ۳ - ۳ = ۰$$

$$۳ - ۳ = ۰ \quad ۳ - ۳ = ۰ \quad ۳ - ۳ = ۰$$

اسلئے ی کی بجائے اسکی قیمت ۱ + ۱ + ۱ رکھنے پر ہمیں (۱) سے حاصل ہوگا

$$۳ - ۳ = ۰ \quad ۳ - ۳ = ۰ \quad ۳ - ۳ = ۰$$

$$۳ - ۳ = ۰ \quad ۳ - ۳ = ۰ \quad ۳ - ۳ = ۰$$

جو دو کعبوں کا مطلوبہ فرق ہے۔

اس متانکہ کی مدد سے کبھی کو مفرد اجزائے ضربی میں تحویل کیا جاسکتا ہے

اور کبھی سادات کا مکمل حل معلوم ہو سکتا ہے۔ اب ہم سادات ف (۱) =

کی اہلیں مہ اور نہ کی رقوم میں حاصل کریں گے۔ سادات

(۳ - ۳) = ۰ (۱) = ۰ (۳ - ۳) = ۰ (۳ - ۳) = ۰

کو ثنائی کبھی کے طور پر حل کیا جائے تو ی = ۱ + ۱ + ۱ کے لئے ہمیں سب

تین قیمتیں ملنی :-

$$۳ - ۳ = ۰ \quad ۳ - ۳ = ۰ \quad ۳ - ۳ = ۰$$

$$۳ - ۳ = ۰ \quad ۳ - ۳ = ۰ \quad ۳ - ۳ = ۰$$

۳۱۳۱۳۱ (۳۱۳۱۳۱ + ۳۱۳۱۳۱)  
اب اگر ۳۱۳۱۳۱ اور ۳۱۳۱۳۱ کی بجائے جذرا لکعبوں کا کوئی زوج رکھ دیا جائے جو دو سلسلوں

۳۱۳۱۳۱ ۳۱۳۱۳۱ ۳۱۳۱۳۱  
۳۱۳۱۳۱ ۳۱۳۱۳۱ ۳۱۳۱۳۱  
میں سے ہر ایک سے ایک ایک جذرا لکعب منتخب کر کے بنایا گیا ہو تو یہ معلوم ہو گا کہ یہی کی دہری تین قیمتیں حاصل ہوتی ہیں اور ان قیمتوں کی صرف ترتیب منتخب شدہ جذرا لکعب کی بموجب بدلتی ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جملہ

۳۱۳۱۳۱ (۳۱۳۱۳۱ + ۳۱۳۱۳۱)  
کی تین اور صرف تین قیمتیں ہیں جب کہ جذرا لکعبوں کو عام سے عام شکل میں لیا جائے۔ اس لئے یہ شکل دفعہ ماضی کی حاصل شدہ شکل کے علاوہ ایسی شکل ہے جو کعبی مساوات کی اصل کو تعبیر کرنے میں استعمال ہو سکتی ہے۔ دیکھو دفعہ ۵۵ (۱)۔

جب تفاعل (۲) کو (جو اوپر بیان ہوا) مستحیل کر کے مختصر کیا جاتا ہے تو وہ

$$\frac{1}{h} \{ (ا ج - ب) لا + (ا د - ب ج) لا + (ب د - ج ا) \}$$

ہو جاتا ہے، اس لئے اس دو درجہ کے اجزائے ضربی دو ثنائی جملے

لا + ب + مہ، لا + لا + ب + نہ  
ہیں جو ف (لا) کے مذکورہ بالا جملہ میں دو لکعبوں کے فرق کے طور پر واقع ہوتے ہیں۔

۵۹۔ اصولوں کے متشاكل تفاعلوں کے ذریعہ کعبی کا حل۔ چونکہ جملہ

۱۔  $\{ع + ی + ج + طه (ع + سه + ی + سه ج) + طه (ع + سه + ی + سه ج) + طه (ع + سه + ی + سه ج)\}$   
 کی تین قیمتیں ع، ی، ج ہیں، جبکہ طه، قیمتیں ۱، سه، سه ۲ اختیار کرے  
 اسلئے یہ ظاہر ہے کہ اگر تفاعلوں

طه (ع + سه + ی + سه ج) طه (ع + سه + ی + سه ج)  
 کو کبھی کے سروں کی رقوم میں بیان کیا جاسکے تو ہم مندرجہ بالا ضابطہ میں  
 ان قیمتوں کو درج کرنے سے کبھی مساوات کا جبری حل معلوم کر سکتے ہیں۔  
 لیکن ان تفاعلوں کی قیمت ایک دو درجی مساوات کے حل کرنے سے  
 بالراست حاصل نہیں ہو سکتی کیونکہ اگر جبکہ مندرجہ بالا دو تفاعلوں کا حاصل  
 ع، ی، ج کا ایک منطوق متشکل تفاعل ہے مگر انکا مجموعہ ایسا تفاعل نہیں  
 ہے۔ اس کے باوجود یہ معلوم ہو گا کہ ان دو تفاعلوں کے لمبوں کا مجموعہ  
 اصلوں کا ایک متشکل تفاعل ہے اور اس لئے سروں کی رقوم میں یہاں ہو سکتا  
 ہے جیسا کہ ہم اب بتائینگے۔ سہولت کے مد نظر ہم ترمیم ذیل اختیار کرتے  
 ہیں

$$\begin{aligned} \text{ل} &\equiv \text{ع} + \text{سه} + \text{ی} + \text{سه ج} \\ \text{م} &\equiv \text{ع} + \text{سه} + \text{ی} + \text{سه ج} \end{aligned}$$

تو

$$\begin{aligned} (\text{طه ل}) &= (\text{ل} + \text{ب سه} + \text{ج سه}) \\ (\text{طه م}) &= (\text{ل} + \text{ب سه} + \text{ج سه}) \end{aligned}$$

جہاں

$$\begin{aligned} \text{ل} &= \text{ع} + \text{ی} + \text{ج} + \text{ع} + \text{ی} + \text{ج} + \text{ع} + \text{ی} + \text{ج} = ۳\text{ع} + ۳\text{ی} + ۳\text{ج} \\ \text{ج} &= ۳\text{ع} + ۳\text{ی} + ۳\text{ج} + \text{ع} + \text{ی} + \text{ج} = ۴\text{ع} + ۴\text{ی} + ۴\text{ج} \end{aligned}$$

اس لئے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ل} + \text{م} = ۳\text{ع} + ۳\text{ی} + ۳\text{ج} + ۴\text{ع} + ۴\text{ی} + ۴\text{ج} = ۷\text{ع} + ۷\text{ی} + ۷\text{ج}$$

(دیکھو مثال ۵ صفحہ ۶۰ اور مثال ۱۵ صفحہ ۶۹) -

$$(طی) (طه م) = ل م = عه + یه + جہ - جہ - جہ - عہ - عہ$$

$$= ۹ - \frac{ھ}{۲}$$

اس لئے دو درجی مساوات

$$ت + ۳ = \frac{گ}{۲} - ت - ۳ = \frac{ھ}{۲}$$

کی اصلیں ہیں

$$(عہ + سہ + سہ + سہ) (عہ + سہ + سہ + سہ) = (عہ + سہ + سہ + سہ)$$

اس مساوات کی اصلوں کو یعنی

$$\frac{۳}{۲} (گ - ۳) = ۳ + ۳ + ۳ + ۳$$

کو ت اور تہ سے تعبیر کیا جائے تو ابتدائی ضابطہ سے جو کبھی کے سروں کی رقوم میں بیان ہو چکا ہے یہیں تین اصلیں حاصل ہونگی

$$عہ = - \frac{۳}{۲} + \frac{۱}{۳} (مات + مات)$$

$$بہ = - \frac{۳}{۲} + \frac{۱}{۳} (سہ مات + سہ مات)$$

$$جہ = - \frac{۳}{۲} + \frac{۱}{۳} (سہ مات + سہ مات)$$

یہاں یہ بات دیکھ لی جاسکتی ہے کہ عہ، بہ، جہ کی جن قیمتوں پر ہم پہنچے ہیں وہ اسی شکل کی ہیں جو دفعہ ۵۶ میں حاصل ہوئی تھیں -  
تفاعلوں

$$(عہ + سہ + سہ + سہ) (عہ + سہ + سہ + سہ) = (عہ + سہ + سہ + سہ)$$

کی اس خاصیت کا خیال رکھنا ضروری ہے کہ وہ تین مقداروں کے سادہ ترین  
تفاضل ہیں جنکی صرف دو قیمتیں ہوتی ہیں جبکہ ان مقداروں کو باہم کسی  
طرح ایک دوسرے کی جگہ بدل دیا جائے۔ اسی خاصیت کی بنا پر کبھی مساوات  
کا حل دو درجی مساوات کے حل پر منحصر کیا جاسکتا ہے۔ عہ، یہ، جہ کے  
متعدد تفاضل ایسے ہیں جنہیں یہ خاصیت پائی جاتی ہے اور آئندہ چلکر یہ  
ثابت کیا جائیگا کہ کسی دو ایسے تفاضلوں میں ایک منطوق خطی رابطہ موجود  
ہوتا ہے جو سروس کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے۔  
کبھی کو جبری طریقہ پر حل کرنے کے متعدد طریقوں پر مکمل بحث کر نیکیے  
بعد ہم ایسی مثالیں درج کرتے ہیں جنہیں دفات مابین کے اصول استعمال  
میں آتے ہیں۔

## مثالیں

۱۔ جملہ

$$(ب-جہ)^1 (لا-عہ)^1 + (لا-بہ)^1 + (عہ-بہ)^1 (لا-جہ)^1$$

کو مفرد اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔

$$ع = (ب-جہ) (لا-عہ) = (جہ-عہ) (لا-بہ)$$

$$ھ = (عہ-بہ) (لا-جہ)$$

$$\text{جواب: } \frac{1}{3} (ع + ھ + ۳) = (ع + ھ + ۳)$$

۲۔ ثابت کرو کہ نظام

$$(ب-جہ)^2 (لا-عہ)^2 = (جہ-عہ)^2 (لا-بہ)^2 = (عہ-بہ)^2 (لا-جہ)^2$$

کی مساواتوں میں دو اجزائے ضربی مشترک ہیں۔

مثال مابین کی ترقیم کو اختیار کرنے سے

$$ع^2 = ۳ = ھ^2$$

$$\text{جس سے } ع^2 - ۳ = (ع-۳)(ع+۳) = (ع-۳)(ع+۳+۳+۳) = (ع-۳)(ع+۳+۳+۳)$$

$$۰ = ھ + ۳ + ھ + ۳$$



اسلئے (یہ - جب) (لا - ع) + (جہ - ع) (لا - یہ) + (عہ - یہ) (لا - جب) مطلوبہ مشترک جزو ضربی ہے جو دوسرے درجہ کا ہے۔  
۳۔ حسب ذیل جملوں کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔

(۱) (یہ - جب) (لا - ع) + (جہ - ع) (لا - یہ) + (عہ - یہ) (لا - جب)

(۲) (یہ - جب) (لا - ع) + (جہ - ع) (لا - یہ) + (عہ - یہ) (لا - جب)

(۳) (یہ - جب) (لا - ع) + (جہ - ع) (لا - یہ) + (عہ - یہ) (لا - جب)

انچے اجزائے ضربی مثال ۲ صفحہ ۸۲ میں حاصل شدہ نتیجوں کی مدد سے فوراً لکھے جاسکتے ہیں۔ مثال (۱) کی ترقیم استعمال کرنے سے اور مثال ۴ صفحہ ۸۲ میں عم، ہ، ا، جہ کی بجائے ع، و، ہ، ج کرنے سے حسب ذیل اجزائے ضربی حاصل ہونگے:-

جواب:- (۱) ۳ ع و ہ (۲) ۵ (ع + و + ہ) ع و ہ

(۳) ۴ (ع + و + ہ) ع و ہ

۴۔ (لا - ع) (لا - یہ) (لا - جب)

کو دو مکعبوں کے فرق کی شکل میں بیان کرو۔  
فرض کرو

(لا - ع) (لا - یہ) (لا - جب) = ع - و - ہ

جس سے

ع - و - ہ = لہ (لا - ع)

سہ ع - سہ و - سہ ہ = مہ (لا - یہ)

سہ ع - سہ و - سہ ہ = نہ (لا - جب)

جمع کرنے سے

لہ + مہ + نہ = ۰، لہ عہ + مہ یہ + نہ جب =

اور اسلئے

لہ = مہ (یہ - جب)، مہ = لہ (جہ - ع)، نہ = لہ (عہ - یہ)

لیکن لہ مہ نہ = ۱، اس لئے



اور اور چونکہ

$$ل^۲ - م^۲ = ۳ - ۱۳ (ب - ج) (ج - ع) (ع - ی)$$

$$(ل^۲ - م^۲) = (ل^۲ + م^۲) - ۴ ل م$$

اس لئے  $ل^۲ + م^۲$  کی اور  $ل م$  کی قیمتوں کو درج کرنے سے جو دفعہ ۵۹ میں حاصل کیجا چکی ہیں حاصل ہوگا

$$(ب - ج) (ج - ع) (ع - ی) = ۲۷ - (۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲)$$

(دیکھو دفعہ ۴۲)

۷۔ تماثلات ذیل ثابت کرو:-

$$ل^۲ + م^۲ = \frac{۱}{۳} \{ (۲ - ب - ج - ع - ی) + (۲ - ج - ع - ی) + (۲ - ع - ی) \}$$

$$ل^۳ - م^۳ = ۳ - ۱۳ (ب - ج) (ج - ع) (ع - ی) + (۲ - ج - ع - ی) + (۲ - ع - ی) + (۲ - ب - ج - ع - ی)$$

ل + م وغیرہ، ل - م وغیرہ کی قیمتوں کو جو مثال اسبق میں دی گئی ہیں تیسری قوت پر اٹھانے اور جمع کرنے سے ہم بہ آسانی مذکورہ بالا تماثلات حاصل کر سکتے ہیں۔

۸۔ ع، ی، جہ کے فرقوں کی رقوم میں  $ل^۲$ ،  $م^۲$  وغیرہ کے لئے جملے معلوم کرو۔

$$(ع + م + ی + ب + ج) اور (ع + م + ی + ب + ج) میں سے$$

$$(ع + ی + ب + ج) (۱ + م + م) = ۰$$

کو تفریق کرنے سے  $ل^۲$  اور  $م^۲$  کے لئے حسب ذیل جملے حاصل ہوتے ہیں:-

$$ل^۲ = (ب - ج) (ج - ع) (ع - ی) + م^۲ + (ع - ی) (ع - م) (م - ب)$$

$$م^۲ = (ب - ج) (ج - ع) (ع - ی) + ل^۲ + (ع - ی) (ع - م) (م - ب)$$

اسی طرح ان جملوں سے ہم حاصل کرینگے

- ل<sup>۱</sup> = (بہ - جہ) + (سہ - جہ - عہ) + (۲ بہ - جہ - عہ)  
 + سہ (عہ - بہ) + (۲ جہ - عہ - بہ)  
 - م<sup>۱</sup> = (بہ - جہ) + (۲ عہ - بہ - جہ) + سہ (جہ - عہ - بہ)  
 + سہ (عہ - بہ) + (۲ جہ - عہ - بہ)  
 نیز بغیر کسی وقت کے ل<sup>۱</sup> م اور ل<sup>۲</sup> م کے لئے حسب ذیل جملے حاصل ہونگے:

$$ل^۲ م = (بہ - جہ) + (جہ - عہ) + (عہ - بہ)$$

$$ل^۲ م = (عہ - بہ) + (بہ - جہ) + (جہ - عہ)$$

$$+ (جہ - عہ) + (عہ - بہ)$$

۹۔ ل یا م کے نوذ کے چھ تفاعل حسب ذیل ہیں

عہ + سہ بہ + سہ جہ + سہ عہ + سہ بہ + جہ + سہ عہ + سہ بہ + سہ جہ  
 عہ + سہ بہ + سہ جہ + سہ عہ + سہ بہ + جہ + سہ عہ + سہ بہ + جہ  
 وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں یہ چھ مقداریں ہوں۔

ان تفاعلوں کو حسب طریقہ ذیل بیان کیا جاسکتا ہے:-

$$ل \quad سہ \quad ل \quad سہ \quad ل \quad سہ$$

$$م \quad سہ \quad م \quad سہ \quad م \quad سہ$$

پس مساوات

$$(ل - ل) (ل - ل) (ل - ل) (ل - ل) (ل - ل) (ل - ل)$$

$$= (ل - ل) (ل - ل)$$

$$ل^۲ - (ل + م) (ل + م) + ل^۳ = م^۳$$

یا  
 کی اصلیں مندرجہ بالا مقداریں ہیں۔

ساواتوں

$$ل م = - \frac{۹}{۲} ، ل + م = - \frac{۲۷}{۲} گ$$

سے ل اور م کی بجائے انکی قیمتیں درج کرنے سے ہم اوپر کی مساوات کو سروں کی

رقوم میں اس طرح بیان کر سکتے ہیں :-

$$۲ + ۳ = ۵ \quad ۳ - ۲ = ۱ \quad ۲ = \frac{۲}{۱}$$

۱۰۔ ل اور م کی رقوم میں ایسی مساوات بناؤ جس کی اصلیں عام  
کبھی مساوات کی اصولوں کے فرقوں کے مربع ہوں -  
فرض کرو کہ  $۲ = (۲ - ۲)$   
پس قبل الذکر نتیجوں سے

$$۳ - ۲ = ۱ \quad ۲ - ۱ = ۱$$

اس کو منطق بناؤ تو

$$۲ = \frac{(۲ - ۱)}{۱} + (۲ - ۱)$$

یہ مطلوبہ مساوات ہے -  
اسی طرح مثال ۸ کے نتیجوں کی مدد سے اس مساوات کی مربع دار فرقوں  
مساوات یا وہ مساوات جسکی اصلیں ہوں

(۲ - ۲) (۲ - ۲) (۲ - ۲) (۲ - ۲) (۲ - ۲) (۲ - ۲) (۲ - ۲) (۲ - ۲)  
حاصل ہوتی ہے اگر ہم آخری مساوات میں م اور ل کی بجائے علی الترتیب  
ل اور م درج کریں اور اس عمل کو جتنی مرتبہ ہم چاہیں دہرا سکتے ہیں -  
بالآخر یہ سب مساواتیں کبھی کے سروں کی رقوم میں روابط

$$۲ = ۱ - ۲ \quad ۳ = ۲ - ۱ \quad ۴ = ۳ - ۲ \quad ۵ = ۴ - ۳ \quad ۶ = ۵ - ۴ \quad ۷ = ۶ - ۵ \quad ۸ = ۷ - ۶ \quad ۹ = ۸ - ۷$$

کی مدد سے بدآسانی بیان ہو سکتی ہیں - مثلاً پہلی مساوات ہوگی

$$۲ = \frac{۲}{۱} + (۲ - ۱)$$

(دیکھو دفعہ ۲۲)

(118)

۱۱۔ اگر کبھی مساواتوں

$$۱ \text{ لا} + ۳ \text{ ب لا} + ۳ \text{ ج لا} + ۱ = ۰$$

$$۱ \text{ لا} + ۳ \text{ ب لا} + ۳ \text{ ج لا} + ۱ = ۰$$

کی اصلیں عہ، یہ، جہ اور عہ، یہ، جہ ہوں تو وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں  
تفاضل

$$۱ = ۰ \text{ عہ عہ} + ۱ \text{ یہ یہ} + ۱ \text{ جہ جہ}$$

کی چھ قسمیں ہوں -

عمل کا سب سے آسان طریقہ یہ ہے کہ پہلے ان کعبیوں کے لئے وہ مساواتیں

بنائی جائیں جن میں دوسری نہیں موجود نہ ہوں یعنی

$$۱ \text{ عہ} + ۳ \text{ ہ ہی} + ۱ = ۰ \text{ عہ} + ۳ \text{ ہ ہی} + ۱ = ۰$$

اور پھر مطلوبہ مساوات عام صورت میں ان سے اخذ کی جائے گی کیونکہ اس طور پر احتمال شدہ  
کعبیوں کی صورت میں اصولوں کے دئے ہوئے تفاضل کے جواب میں تفاضل

$$۱ = ۰ \text{ عہ عہ} + ۱ \text{ یہ یہ} + ۱ \text{ جہ جہ}$$

$$+ ۱ \text{ جہ جہ} + ۱ \text{ یہ یہ} + ۱ \text{ عہ عہ} = ۰ \text{ عہ عہ} + ۱ \text{ یہ یہ} + ۱ \text{ جہ جہ}$$

حاصل ہوگا -

احتمال شدہ مساواتوں کی اصلوں کی بجائے ان کی قیمتیں جنکو جذروں سے  
بیان کیا گیا ہے درج کرنے سے

$$۱ = ۰ \text{ عہ عہ} + ۱ \text{ یہ یہ} + ۱ \text{ جہ جہ}$$

$$+ ۱ \text{ جہ جہ} + ۱ \text{ یہ یہ} + ۱ \text{ عہ عہ} = ۰ \text{ عہ عہ} + ۱ \text{ یہ یہ} + ۱ \text{ جہ جہ}$$

جو شکل

$$۱ = ۰ \text{ عہ عہ} + ۱ \text{ یہ یہ} + ۱ \text{ جہ جہ}$$

میں تحویل ہوتا ہے -

اسکا کعب لینے سے حاصل ہوتا ہے

$$۱ = ۰ \text{ عہ عہ} + ۱ \text{ یہ یہ} + ۱ \text{ جہ جہ}$$

اب ف، ق اور ق، ق کی بجائے ان کی قیمتیں جو مساواتوں  
 $\text{لا} + \text{گ} - \text{لا} - \text{ھ} = ۰$ ،  $\text{لا} + \text{گ} - \text{لا} - \text{ھ} = ۰$ ۔

سے حاصل ہوتی ہیں درج کی جائیں تو فہ کی قیمتیں دو کبھی مساواتوں  
 $\text{فہ} - ۲\text{ھ} - ۲\text{گ} = ۰$  (گ گ) اور  $\text{فہ} - ۲\text{ھ} - ۲\text{گ} = ۰$ ۔

سے مل جائیں گی جہاں

$\text{ا} = \text{گ} + ۲\text{ھ}$  اور  $\text{ا} = \text{گ} + ۲\text{ھ}$   
 آخر الامر فہ کی بجائے اس کی قیمت  $\text{ا} - \text{فہ} - ۳\text{ب} = ۰$  درج کرنے سے  
 اور ان دو کجیوں کو باہم ضرب دینے سے ہمیں مطلوبہ مساوات ملے گی۔ یہ یاد  
 رہے کہ اگر ایک کجی  $\text{ا} - ۱ = ۰$  ہو تو فہ = عہ + سہ + سہ + سہ وغیرہ۔  
 اس صورت پر مثال ۹ میں غور کیا جا چکا ہے۔

۱۲۔ دو مساوات بننا جس کی اسکیں سر کی مختلف قیمتیں ہوں جہاں (115)

$$\frac{\text{عہ} - \text{سہ}}{\text{عہ} - \text{سہ}} = \text{س}$$

اور عہ، سہ، جہ مساوات  $\text{ا} - \text{لا} + ۳\text{ب} - \text{لا} + ۳\text{ج} - \text{لا} + \text{د} = ۰$  کی اصلیں ہیں۔  
 چونکہ سہ، عہ، جہ کے صرف فرق اور ان کی قیمتیں شامل ہیں اس لئے  
 نتیجہ وہی حاصل ہوگا اگر ہم عہ، سہ، جہ کی جگہ مساوات  $\text{ا} + ۳\text{ھ} - \text{ی} + \text{گ} = ۰$   
 کی اصلیں  $\text{ی}$ ،  $\text{ا}$ ،  $\text{ی}$  رکھیں۔  
 اس لئے

$$\text{ی} (۱ - \text{س}) = (۱ + \text{س}) \text{ی}$$

$$\text{گ} = \text{ی} (۱ + \text{س}) - \text{ی} (۱ - \text{س}) = \frac{(۱ - \text{س})(۱ + \text{س})}{۲(۱ + \text{س})}$$

$$\text{ا} = \frac{(۱ + \text{س} - ۲\text{س})}{۲(۱ + \text{س})} - \text{ھ}$$

ان سے می کو سا قف کر دیا جائے تو مطلوبہ مساوات ملے گی  

$$ه^۲ = (۱+س)(۲-س)(۱-س^۲) + گ^۲ (س+۱)^۲ = ۰$$
 ۱۳۔ کعبیوں

۱ لا + ۳ ب لا + ۳ ج لا + د = ۰  
 ۲ لا + ۳ ب لا + ۳ ج لا + د = ۰  
 کے سروں کے درمیان ربط معلوم کرو جبکہ اصولوں میں ربط  
 عہ (یہ - جہ) + یہ (جہ - عہ) + جہ (عہ - یہ) = ۰  
 موجود ہو۔

سہ - سہ سے ضرب دو تو یہ مساوات ہو جائے گی

ل م = ل م  
 مکعب لیکر سروں کو داخل کرنے سے مطلوبہ مساوات حاصل ہوگی  
 گ<sup>۲</sup> ه<sup>۲</sup> = گ<sup>۲</sup> ه<sup>۲</sup>

۱۴۔ سروں اور اصولوں کی رقوم میں وہ شرط معلوم کرو کہ مثال ۳ کی  
 کعبی مساواتیں خطی استحالہ  
 لا = پ لا + ق  
 سے مماثل ہو جائیں۔

اس صورت میں

عہ = پ عہ + ق، یہ = پ یہ + ق، جہ = پ جہ + ق  
 پ اور ق کو سا قف کرنے سے

یہ جہ - یہ جہ + جہ عہ - جہ عہ + عہ یہ - عہ یہ = ۰

جو اصولوں کا ایسا تفاعل ہے جس پر مثال ماسبق میں غور کیا جا چکا ہے۔ مزید برآں یہ ربط  
 غیر متغیر رہتا ہے اگر عہ، یہ، جہ، اور عہ، یہ، جہ کی بجائے

ل عہ + م، ل یہ + م، ل جہ + م،  
 ل عہ + م، ل یہ + م، ل جہ + م



(۲۰) درج کئے جائیں۔ اس لئے ہم مثال ماسبق کی کعبی مساداتوں کو سادہ شکلوں  
 $\text{ی}^۱ + \text{ہ}^۳ = \text{گ}^۰ = \text{ی}^۲ + \text{ہ}^۳ + \text{ی}^۱ + \text{گ}^۰ =$   
 میں غور کر سکتے ہیں جو خطی استحالوں  $\text{ی} = \text{لا} + \text{ب}$ ،  $\text{ی} = \text{لا} + \text{ب}$  سے حاصل ہوتے ہیں۔ کیونکہ اگر شرط قبل الذکر مساداتوں پر صادق آتی ہے تو  
 بعد الذکر مساداتوں پر بھی صادق آتی چاہیے۔  
 اب رکھو  $\text{ی} = \text{ک}$ ،  $\text{ی} = \text{ک}$  تو یہ مساداتیں مائل ہو جائیں گی اگر  
 $\text{ہ}^۱ = \text{ک}^۱$ ،  $\text{ہ}^۲ = \text{ک}^۲$ ،  $\text{ہ}^۳ = \text{ک}^۳$   
 ان سے  $\text{ک}$  کو ماقفا کیا جائے تو مطلوبہ شرط حاصل ہوگی  
 $\text{گ}^۱ \text{ہ}^۲ = \text{گ}^۲ \text{ہ}^۱$   
 یہ شرط دی ہے جو مثال ۱۳ میں حاصل ہوئی تھی۔ یہ یاد رہے کہ کعبیوں کو تحویل  
 کرنے والے دو درجی اُسی استعمالہ یعنی

$$\frac{\text{ہ}}{\text{گ}} (\text{لا} + \text{ب}) = \frac{\text{ہ}}{\text{گ}} (\text{لا} + \text{ب})$$

سے مائل ہوتے ہیں۔

۶۰۔ کعبی کی دو اصلوں کے درمیان ہم رسم ربط۔ چار درجہ کی بحث  
 شروع کرنے سے پیشتر ہم کعبی کے لئے حسب ذیل اہم مسئلہ ثابت کرتے ہیں:-  
 کعبی کی اصلوں میں سے دو دو اصلوں کے درمیان سروں کی  
 رقوم میں ایک ہم رسم ربط ہوتا ہے۔

دفعہ ۲۷ کی ۱۳ ویں اور ۱۴ ویں مثالوں سے ہم جانتے ہیں کہ

$$\begin{aligned} \text{ا}^۱ (\text{ب} - \text{ج}^۱) + \text{ا}^۲ (\text{ج} - \text{ع}^۱) + \text{ا}^۳ (\text{ع} - \text{ب}^۱) &= ۱۸ (\text{ا}^۱ - \text{ا}^۲ - \text{ا}^۳) \\ \text{ا}^۱ (\text{ع} - \text{ب}^۱) + \text{ا}^۲ (\text{ج} - \text{ع}^۱) + \text{ا}^۳ (\text{ج} - \text{ب}^۱) &= ۹ (\text{ا}^۱ - \text{ا}^۲ - \text{ا}^۳) \\ \text{ا}^۱ (\text{ع}^۱ - \text{ب}^۱) + \text{ا}^۲ (\text{ج} - \text{ع}^۱) + \text{ا}^۳ (\text{ج} - \text{ب}^۱) &= ۱۸ (\text{ا}^۱ - \text{ا}^۲ - \text{ا}^۳) \end{aligned}$$



میں لکھنا گیا ہے جہاں

سی = ا لا + ب ،      ه = ا ج - ب ،

$$ع \equiv 1 س - ۲ ب + ۳ ج'$$

$$g = 1 - 3ab + 2a^2b^2$$

اس مساوات کو حل کر نیچے لے (جس میں دوسری رقم موجود نہیں ہے) یوں ایک اصل کے لئے حسب ذیل عام جملہ مان لیتا ہے:-

$$م = م + م + م$$

مربع لینے سے

نئی - ف - ق - ر = (ماقمار + مہارماق + مہاماق)

پچھسہ مریج لینے اور تحویل کرنے سے ہمیں مساوات حاصل ہوگی

ی-۲ (ف+ق+ر) ی-۸ می-۱۱

$$= (f + q + r) - (r + q + f + q) = 0$$

اس مساوات کا مقابلہ قبل الذکر مساوات سے کیا جائے تو

$$ف + ق = ر - هـ \quad ق' + ر + ف + ق = هـ \quad ٣ - \frac{ع}{م}$$

$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$

اور اس لئے ف، ق، ر، مساوات

$$(1) \dots = \frac{g}{r} - t \left( \frac{e}{r} - h^2 \right) + t^2 h^2 + t^3$$

کی اعلیٰ ہیں۔ یا چونکہ

۱۰۔  $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ ۔  $\frac{d}{dx} x^{-2} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$  (دفعہ ۳)

جہاں جے  $\equiv 1ج س + 2ب ج د - 1د - س ب - ج$

(122)

اسلئے یہ مساوات شکل

۴ (ت + ہ) - ۳ (ا ع (ت + ہ) + ا جے = .  
میں لکھی جاسکتی ہے اور ت + ہ = ا طہ رکھنے سے بالآخر میں مساوات  
۴ ا طہ - ع ا طہ + جے = .

حاصل ہوتی ہے - اس کو ہم چار درجی مساوات کا محمول کبھی کہیں گے اور

آئندہ اس کو اسی نام سے موسوم کریں گے - جب مساواتوں (۱) اور (۲) میں  
تینز پیدا کرنا ضروری ہو جائے تو ہم قبل الذکر مساوات کو لو لڑ کا کبھی کہیں گے  
نیز چونکہ ت = ب - ا ج + ا طہ اس لئے اگر کبھی کی اصلیں  
طہ، طہ، طہ ہوں تو

$$ف = ب - ا ج + ا طہ، ق = ب - ا ج + ا طہ،$$

$$ر = ب - ا ج + ا طہ$$

اور اسلئے

$$ی = ب - ا ج + ا طہ، ب - ا ج + ا طہ، ب - ا ج + ا طہ$$

اگر اس ضابطہ کو ی میں چار درجی مساوات کی ایک اصل قرار دیا جائے  
تو یہ یاد رکھنا چاہئے کہ شامل ہونے والے جذر عام سے عام شکل میں نہیں  
ہیں کیونکہ اگر ایسا ہوتا تو ی کی چار قیمتوں کی بجائے آٹھ قیمتیں ضابطہ سے  
حاصل ہوتیں - ٹھیک ٹھیک قید ربط

$$ماف ماف ماف = - گ$$

سے عاید ہوتی ہے (جس کو مربع لینے میں نظر انداز کر دیا گیا ہے) جس کی  
بموجب مقداروں ماف، ماف، ماف میں سے ہر ایک کو ایسی

علامتیں لگائی ہونگی کہ ان کا حاصل ضرب وہی علامت برقرار رکھ سکے جو اوپر کی مساوات سے متعین ہوتی ہے۔ اس طرح

$$\text{ماق} \text{ماق} \text{ماق} = \text{ماق} (-\text{ماق}) (-\text{ماق})$$

$$= (-\text{ماق}) \text{ماق} (-\text{ماق}) = (-\text{ماق}) (-\text{ماق}) \text{ماق}$$

مقداروں ماق، ماق، ماق کے وہ سب ممکن اجتماع ہیں جو

اس شرط کو پورا کرتے ہیں بشرطیکہ ماق، ماق، ماق پورے عمل میں وہی علامتیں برقرار رکھیں خواہ یہ علامتیں کچھ معی ہوں یہ بہر کیف علامت سے متعلق تمام شکوک کو ہم رفع کر سکتے ہیں اور یہی کی چار قیمتوں کو ایک واحد جبری ضابطہ سے بیان کر سکتے ہیں اور یہ اس طرح کی مفروضہ قیمت سے متذکرہ بالا ربط کے ذریعہ مقداروں ماق، ماق، ماق میں سے کسی ایک کو ساقط کر دیا جائے اور باقی دو مقداروں پر علامت کی کوئی قید نہ لگائی جائے۔ اس لئے ی کے لئے جو جملہ ہے وہ ہو جاتا ہے

(12)

$$y = \frac{g}{\text{ماق}^2} - \text{ماق} + \text{ماق}$$

یہ ضابطہ ایسا ہے جو بر قسم کے ایہام سے پاک ہے کیونکہ اس سے

ی کی چار اور صرف چار قیمتیں حاصل ہوتی ہیں جبکہ ماق اور ماق کو دوہری

علامتیں لگادی جائیں۔ یہ ظاہر ہے کہ پہلی دو مقداروں کو جو علامتیں دی جائیں گی ان کے لحاظ سے تیسری رقم کے نسبت نما کی علامت متعین ہو جائیگی۔ بالآخر ف، ق اور ی کو ان کی وہ قیمتیں دینے سے جو اوپر حاصل کی گئی ہیں ہمیں حاصل ہوگا

$$۱ا + ۱ب = ۱ب - ۱ج + ۱طہ + ۱ج - ۱ب - ۱ج + ۱طہ$$

گ

$$۲ا + ۲ب - ۲ج + ۲طہ + ۲ب - ۲ج + ۲طہ$$

جو چار درجی مساوات کا مکمل جبری حل ہے جس میں طہ اور طہ مساوات

$$۴ا - ۴ج - ۴طہ + ۴ج = ۰$$

کی اصلیں ہیں۔ چار درجی کے حل کی شکل کے متعلق یوں لکنا ضروری ہے کہ

مفروضہ جائز و درست ہے کیونکہ ہم دیکھتے ہیں کہ یہی جو مساوات ہے اس کی دوسری رقم موجود نہ ہونے کی وجہ سے اس کی چار اصلوں کا مجموعہ صفر ہے

یعنی  $۱ا + ۱ب + ۱ج + ۱طہ = ۰$  اور اس لیے تفاعل  $(۱ا + ۱ب)$  وغیرہ

جو عام طور پر تعداد میں چھپ چکے (چار مقداروں میں سے دو دو کے اجتماع) اس صورت میں صرف تین ہیں۔ اس طرح ہم مان سکتے ہیں

$$(۱ا + ۱ب) = (۱ا + ۱ب) = ۴ف$$

$$(۱ا + ۱ب) = (۱ا + ۱ب) = ۴ق$$

$$(۱ا + ۱ب) = (۱ا + ۱ب) = ۴ر$$

جس سے  $۱ا، ۱ب، ۱ج، ۱طہ$  ضابطہ

$$۱ا + ۱ب + ۱ج + ۱طہ$$

میں شامل ہو جاتے ہیں۔  
اب ہم یوں لکے کبھی (۱) کی اصلوں اور نیز محمول کبھی (۲) کی اصلوں کو (124)

لا میں دئے ہوئے چار درجی کی اصولوں  $ع + ب = ج + ض$  کی رقوم میں بیان کر چکے۔ جذروں کی علامتوں کے متعلق جو باتیں اوپر بیان کی گئی ہیں ان کو پیش نظر رکھ کر ہم  $ی = لا + ب$  کی چار قیمتیں لکھ سکتے ہیں جو حسب ذیل ہیں :-

$$۱۔ ع + ب = باق - راق - زر$$

$$۲۔ ب = راق + باق - زر \quad (۲)$$

$$۳۔ ج + ب = باق - راق + زر$$

$$۴۔ ض + ب = راق + باق + زر$$

جن سے یولر کے کعبی کی اصولوں  $ف + ق = ر$  کے لئے حسب ذیل جملے فوراً اخذ کئے جاسکتے ہیں :-

$$ف = \frac{۱}{۱۶} (۲ب + ج - ع - ض)$$

$$ق = \frac{۱}{۱۶} (ج + ع - ب - ض) \quad (۳)$$

$$ر = \frac{۱}{۱۶} (ع + ب - ج - ض)$$

مساواتوں (۳) میں سے دو دو مساواتیں لیکر عمل تفسیق سے اور  $ف + ق = ر$  اور  $طم + طم = طم$  کے درمیان مندرجہ بالا رابطوں کو استعمال کرنے سے ہم یہ تسانی حسب ذیل کار آمد روابط حاصل کرتے ہیں جو کعبیوں (۱) اور (۲) کی اصولوں کے فرقوں کو چار درجی کی اصولوں کے فرقوں سے ملاتے ہیں :-

$$۴۔ (ق - ر) = ۴ (طم - طم) = ۴ (ب - ج) (ع - ض)$$

$$۵۔ (ر - ف) = ۴ (ع - ج) = ۴ (ج - ب) (ع - ض) \quad (۵)$$

$$۶۔ (ق - ر) = ۴ (ع - ج) = ۴ (ب - ج) (ع - ض)$$

بالا خزان مساواتوں سے ربط  $ط_۱ + ط_۲ + ط_۳ = ۰$  کے ذریعہ ہم  
 $ط_۱$ ،  $ط_۲$ ،  $ط_۳$  کی قیمتیں عہ، بہ، جہ، ضہ کی رقوم میں اخذ کرتے ہیں:-  
 $۱۲ ط_۱ = (جہ - عہ) (بہ - ضہ) - (عہ - بہ) (جہ - ضہ)$   
 $۱۳ ط_۲ = (عہ - بہ) (جہ - ضہ) - (بہ - جہ) (عہ - ضہ)$   
 $۱۴ ط_۳ = (بہ - جہ) (عہ - ضہ) - (جہ - عہ) (بہ - ضہ)$

(125)

## مثالیں

- ۱۔ جب چار درجی کی دو اصلیں مساوی ہوں تو محول کعبی کی دو اصلیں مساوی ہونگی اور بالعکس۔
  - ۲۔ جب چار درجی کی تین اصلیں مساوی ہوں تو محول کعبی کی سب اصلیں صفر ہونگی اور اس لئے  $ع = ۰$ ،  $ج = ۰$ ۔
  - ۳۔ جب چار درجی مساوی اصلوں کے دو علیحدہ جوڑے رکھتا ہو تو یو لر کے کعبی کی اصلیں صفر ہوتی ہیں اور اس لئے  
 $گ = ۰$ ،  $ا = ۰$ ،  $ع = ۱۲$ ،  $ھ = ۰$ ۔
  - ۴۔ اصلوں کی نوعیت کے لحاظ سے چار درجی اور یو لر کے کعبی کے درمیان روابط ذیل ثابت کرو:-  
 (۱) جب چار درجی کی تمام اصلیں حقیقی ہوں تو یو لر کے کعبی کی تمام اصلیں حقیقی اور مثبت ہونگی۔  
 (۲) جب چار درجی کی تمام اصلیں خیالی ہوں تو یو لر کے کعبی کی تمام اصلیں حقیقی ہونگی جنہیں سے دو منفی اور ایک مثبت ہوگی۔  
 (۳) جب چار درجی کی دو اصلیں حقیقی اور دو خیالی ہوں تو یو لر کے کعبی کی دو اصلیں خیالی اور ایک اصل مثبت اور حقیقی ہوگی۔
- یہ نتیجے مساواتوں (۴) سے بہ آسانی حاصل ہوتے ہیں اگر ق، ر کی قیمتوں میں عہ، بہ، جہ، ضہ کی بجائے مناسبتیں درج کجائیں۔ یہ یاد رہے کہ یہاں تمام ممکن صورتیں بیان کر دی گئی ہیں اور چار درجی کے متعلق یہ فرض کیا گیا ہے۔



اس کی اصلیں ملوی نہیں ہیں۔ ان میں سے ہر مسئلہ کا عکس بھی درجہ پچیس جب یو لڑ کے کبھی کی تمام اصلیں حقیقی اور مثبت ہوں تو ہم یہ نتیجہ نکال سکتے ہیں کہ چار درجی کی تمام اصلیں حقیقی ہیں اور جب یو لڑ کے کبھی کی اصلیں منفی ہوں تو چار درجی کی تمام اصلیں خیالی ہیں درجہ پچیس یو لڑ کے کبھی کی اصلیں خیالی ہوں تو چار درجی کی دو اصلیں حقیقی اور دو اصلیں خیالی ہیں۔

۵۔ ثابت ہو کہ چار درجی کی اصلوں و محمول کبھی کی اصلوں کے درمیان

حسب ذیل ربط موجود ہوتے ہیں:-

(۱) اگر چار درجی کی اصلیں سب کی سب حقیقی ہوں یا سب کی سب خیالی تو محمول کبھی کی سب اصلیں حقیقی ہونگی اور اس کے برعکس جب محمول کبھی کی سب اصلیں حقیقی ہوں تو چار درجی کی اصلیں یا تو سب کی سب حقیقی ہونگی یا سب کی سب خیالی۔

(۲) جب چار درجی کی دو اصلیں حقیقی اور دو اصلیں خیالی ہوں تو محمول کبھی کی دو اصلیں خیالی ہونگی اور اس کے برعکس جب محمول کبھی کی دو اصلیں خیالی ہوں تو چار درجی کی دو اصلیں حقیقی ہونگی اور دو اصلیں خیالی۔

یہ نتیجہ مثلاً باقی سے فوراً اخذ ہو سکتے ہیں کیونکہ گھیوں (۱) اور (۲) کی اصلوں کے درمیان ایک حقیقی ضمنی ربط موجود ہوتا ہے۔

۶۔ جب مثبت ہو تو چار درجی خیالی اصلیں رکھیں گے۔

کیونکہ ایسی صورت میں یو لڑ کے کبھی کی سب اصلیں مثبت نہیں ہو سکتیں۔

۷۔ جب 'ع' منفی ہو تو چار درجی کی دو اصلیں حقیقی ہونگی اور دو اصلیں

خیالی۔

کیونکہ ایسی صورت میں محمول کبھی کی دو اصلیں خیالی ہونگی (مثال ۱۲ صفحہ ۱۴۱)

۸۔ جب 'ھ' اور 'جے' دونوں مثبت ہوں تو چار درجی کی تمام اصلیں خیالی

ہونگی۔

کیونکہ جے مثبت ہونے کی وجہ سے محمول کبھی کی ایک اصل حقیقی اور

منفی ہوگی۔ اسلئے یو لڑ کے کبھی کی بھی ایک اصل حقیقی اور منفی ہوگی اس وجہ سے

کہ ت = ا ط - ط اور ط مثبت ہے۔ یہ مثال (۴) کی صورت (۲) ہے۔

اس ثبوت میں یہ مان لیا گیا ہے کہ پہلا سر ۱ مثبت ہے۔ اگر جے کی بجائے ۱ جے مسئلہ بالا میں درج کیا جائے تو کوہر کسی علامت کی قید لگانا ضروری نہیں۔  
۹۔ ثابت کرو کہ دو چار درجی مساواتوں

$$۱. لآ + ۶ لہ لا ± ۴ لہ لا + لہ = ۰$$

کا محول کعبی ایک ہی ہے۔

۱۰۔ دو چار درجی مساواتوں

$$لا - لآ + ۸ لا لآ + لآ + ۳ ل + ۳ ن - ۳ ل م ن + ۳ (۴ م ن - ل) = ۰$$

کا محول کعبی معلوم کرو۔

$$جواب :- طه - ۳ م ن طه - (۴ م ن + ۳) = ۰$$

۱۱۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$\{ لا - لآ + ۶ لآ + لآ + ۳ (۴ م ن - ل) \} = ۲ (ل + ۴ م + ن - ۳ ل م ن) لا$$

کی آٹھ اصلیں ضابطہ

$$لا + م + ن + لآ + م + سم + سن + لآ + م + سم + سن$$

سے حاصل ہوتی ہیں۔ (مثال ۲۰ صفحہ ۴۴ کے ساتھ مقابلہ کرو۔)

۱۲۔ اگر مساوات

$$۱. ی + ۶ یھ + ۴ یگ + ی + ۳ ع - ۳ یھ = ۰$$

کی ایک اصل

$$لا + م + ن + لآ + م + سم + سن + لآ + م + سم + سن$$

ہو تو ل، م، ن کی رقوم میں 'ھ'، 'ع' جے معلوم کرو۔

$$جواب :- ھ = ل، ع = ۱۲ م ن، جے = ۴ (۴ م + ن)$$



ان استخالوں سے تفاعلوں (عہ - یہ) ' وغیرہ پر کوئی اثر نہیں پڑتا لیکن  
مؤخر الذکر مساوات میں 'گ' ہو جاتا ہے اور اس کے دوسرے سر غیر تغیر  
رہتے ہیں۔ اس لئے مربع دار فرقوں کی مساوات کے سروں میں 'گ' صرف حقیقت  
قوتوں میں داخل ہو سکتا ہے۔ اور دفعہ ۳ کی متماثل مساوات کی مدد سے 'گ' فقط  
کیا جاسکتا ہے اور 'ا'، 'ع'، 'ھ'، 'جے' داخل کئے جاسکتے ہیں۔ اسی طرح ہم بتا  
کر سکتے ہیں کہ اصلوں 'عہ'، 'یہ'، 'جہ'، 'ضہ' کے فرقوں کا ہر حقیقت تفاعل 'ا'، 'ھ'، 'ع'، 'جے'  
کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے اور اس میں 'گ' طان قوتوں میں درج نہ ہو  
نہیں ہوتا۔

۶۲۔ جذروں کے ذریعہ چار درجی کا دوسرا حل۔ فرض کرو کہ

چار درجی مساوات

$$۱ا + ۲ب + ۳ج + ۴د + ۵س = ۰$$

حسب سابق شکل

$$۱ی + ۲ھ + ۳ی + ۴ع + ۵ھ = ۰$$

میں رکھی گئی ہے جہاں  $ی = ۱ا + ۲ب$

اس مساوات کی اصل کے لئے اب ہم جملہ

$$۱ی = ۱ا + ۲ب + ۳ج + ۴د + ۵س$$

فرض کرتے ہیں جس میں تین غیر تابع جذر 'ا'، 'ب'، 'ج' شامل ہیں۔  
دو مرتبہ مربع لینے سے اور تحویل کرنے سے

$$(۱ی - ۲ق - ۳ر - ۴ف - ۵ق) = ۲ف ق ر (۲ی + ۳ف + ۴ق + ۵ر)$$

$$یا ۱ی - ۲(ق ر + ر ف + ف ق) - ۳(ق ق) - ۴(ق ر) - ۵(ق ر) = ۰$$

$$+ (ق ر + ر ف + ف ق) - ۳(ق ق) - ۴(ق ر + ر ف + ف ق) - ۵(ق ر) = ۰$$

اس مساوات کا مقابلہ ی کی قبل الذکر مساوات کے ساتھ کیا

جائے تو

$$ق + ر + ف + ق = ۳ - ۲ھ' ف ق ر = - \frac{گ}{۲}$$

$$ف + ق + ر = \frac{۱۲ھ' - ۱ع' ۲}{گ}$$

جس سے ظاہر ہے کہ 'ق'، 'ر'، 'مسادات' ۲ گ ت + (۱۲ھ' - ۱ع') ت - ۶ھ گ ت + گ = ۰ کی اہلیں ہیں۔

(128) اس مسادات کو یہ آسانی پور کے کبھی میں تحویل کیا جاسکتا ہے۔ یا بلاداسط

$$ت = \frac{۱گ}{۲}$$

کے اندراج سے اور گ کی بجائے اس کی قیمت ۱ع' جے کی رقوم میں رکھنے سے ہم اس کو محول کبھی کی معیاری شکل یعنی شکل ۴ ۱طھ - ۱ع' ۲طھ + جے = ۰

میں تحویل کر سکتے ہیں۔

حل کے اس طریقہ میں ہمیں کسی ایسے اہام سے جو دفعہ ۶۱ میں واقع ہوا تھا واسطہ نہیں پڑتا۔ کیونکہ 'ی' کی قیمت کے طور پر جو جملہ یہاں مان لیا گیا ہے اس کی صرف چار قیمتیں ہیں حالانکہ دفعہ ماسبق میں 'ی' کے لئے جو شکل اختیار کی گئی تھی اسکی آٹھ قیمتیں تھیں۔ یہ بات اسوجہ سے ہے کہ شامل ہونے والے جذر دو ہری علامت رکھتے ہیں متبادل مسادات

$$۲(۱ق + ۱ر + ۱ف + ۱ھ)$$

$$= (۱ق + ۱ر + ۱ف - ۱ق - ۱ر)$$

سے یہ امر بالکل واضح ہے جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اس دفعہ کے جذری جملہ کی قیمتوں کی تعداد اتنی ہی ہے جتنی (۱ق + ۱ر + ۱ف + ۱ھ) کی قیمتوں کی

یعنی چار۔

چار درجی کی اصلوں عہ، بہ، جہ، ضہ کی رقوم میں ف، ق، ر کو بیان کر نیکے لئے لاگو یہ چار قیمتیں عہ، بہ، جہ، ضہ دینے سے

$$۱ = ا + عہ + ب = ا ق ا ر - ا ق ا ف - ا ق ا ت$$

$$۱ = ا + بہ + ب = ا ق ا ر + ا ق ا ر - ا ق ا ف - ا ق ا ت$$

$$۱ = ا + جہ + ب = ا ق ا ر - ا ق ا ر - ا ق ا ف + ا ق ا ت$$

$$۱ = ا + ضہ + ب = ا ق ا ر + ا ق ا ر + ا ق ا ف + ا ق ا ت$$

طالب علم بہ آسانی اس امر کا اطمینان کر سکتا ہے کہ جذروں کی علامتوں کا کوئی اور اجتماع ایسا نہیں ہے جس سے ان چار قیمتوں کے علاوہ کوئی مختلف قیمت حاصل ہو۔

۱ + ۱ = ۱ - ۱ - ۱ اور ۱ + ۱ = ۱ - ۱ - ۱ کی قیمتوں سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$۱ (بہ + جہ - عہ - ضہ) = ا ق ا ر - ا ق ا ف$$

$$۱ (بہ جہ - عہ ضہ) + ۱ (بہ + جہ - عہ - ضہ) = ا ق ا ف - ا ق ا ر$$

(129) ان سے اور ان سے متغایہ مساواتیں استعمال کرنے سے ربط گ = ا ق ا ف - ا ق ا ر کے ذریعہ ہم ف، ق، ر کو اصلوں عہ، بہ، جہ، ضہ کی رقوم میں حسب ذیل طریقوں پر بیان کر سکتے ہیں:-

$$ف = ا - \frac{بہ جہ - عہ ضہ}{بہ + جہ - عہ - ضہ} + ب = \frac{ا (بہ + جہ - عہ - ضہ) + (بہ جہ - عہ ضہ)}{بہ + جہ - عہ - ضہ}$$

$$ق = ا - \frac{بہ جہ - عہ ضہ}{بہ + جہ - عہ - ضہ} + ب = \frac{ا (بہ + جہ - عہ - ضہ) + (بہ جہ - عہ ضہ)}{بہ + جہ - عہ - ضہ}$$

۶۳۔ چار درجی کو دو درجی اجزائے ضربی میں تحلیل کرنا۔ فرض کرو کہ

$$1 = \frac{عہ + ب - جہ - ضہ}{عہ + ب - جہ - ضہ} + \frac{ب}{عہ + ب - جہ - ضہ} = \frac{عہ + ب - جہ - ضہ + ب}{عہ + ب - جہ - ضہ} = \frac{عہ + ۲ب - جہ - ضہ}{عہ + ب - جہ - ضہ}$$

چار درجی

کو دو مربعوں کے فرق نہ کی شکل یعنی شکل

$$(۱ لا + ۲ ب لا + ج لا + ۲ د لا + س لا) - (۲ لا + ۲ ب لا + ج لا + ۲ د لا + س لا)$$

میں بیان کیا گیا ہے۔

دئے ہوئے چار درجی کو ۱ سے ضرب دو اور اس جملہ کے ساتھ اسکا مقابلہ کر دو تو ذیل کی مساواتیں مقداروں 'ن' اور طہ کو متعین کر کے لے لی حاصل ہو گئی۔

$$مہ = ب - ۲ - (ج + ۲ طہ) = مہ - ۲ - ج - ۲ طہ + ۲ ب + ۲ طہ$$

$$ن = (ج + ۲ طہ) - ۲ - ۱ س$$

ان مساواتوں سے مہ اور ن کو ساقط کر دو تو

$$۲ طہ - (۱ س - ۲ ب + ۲ ج + ۲ طہ) = ۲ ب + ۲ ج + ۲ طہ - ۲ ب - ۲ ج - ۲ طہ$$

$$- ۲ طہ - ۲ ب - ۲ ج - ۲ طہ = ۲ - ۲ ج - ۲ طہ$$

جو وہی محوٹ کبھی ہے جسکو پہلے حاصل کیا جا چکا ہے۔

۱۹۔ چار درجی کو دو مربعوں کے فرق میں تحلیل کرنا سب سے پہلا طریقہ تھا جو درج چہارم کی مساوات کے حل کے لئے استعمال کیا گیا تھا جس کو یہ طریقہ فیرارسی (Ferrari) نے دریافت کیا تھا۔ اگرچہ بعض مصنف اس کو سیمپسن (Simpson) سے منسوب کرتے ہیں۔ (دیکھو نوٹ ۱)۔

دفعہ تیندہم جو طریقہ بیان کیا گیا ہے اس میں چار درجی کو بالراست دو درجی اجزائے کے حامل ضرب کے مساوی رکھا گیا ہے یہ طریقہ ڈیکارٹ کا طریقہ ہے۔

(30)

اس مساوات سے طہ کی تین قیمتیں (طہ<sup>۱</sup>، طہ<sup>۲</sup>، طہ<sup>۳</sup>) ملتی ہیں جن کے جواب میں م<sup>۱</sup>، م<sup>۲</sup>، م<sup>۳</sup> کی تین قیمتیں ملیں گی۔ پس چار درجی کی مفروضہ شکل کے تمام سر تین جداگانہ طریقوں سے متعین ہوتے ہیں۔ مزید بریں یہ ظاہر ہے کہ ہر قیمت کے جواب میں ن کی ایک واحد قیمت ملتی ہے کیونکہ

$$م<sup>۱</sup> = ب + ج - د + د + ۲ ب طہ$$

چار درجی

$$(د + لا + ۲ ب + لا + ج + ۲ طہ) - (۲ م + لا + ن)$$

کو صریحاً دو درجی اجزائے ضربی

$$د + لا + ۲ ب + لا + ج + ۲ طہ - ۲ م + لا - ن$$

$$د + لا + ۲ ب + لا + ج + ۲ طہ + ۲ م + لا + ن$$

یعنی

$$د + لا + ۲ (ب - م) + لا + ج + ۲ طہ - ن$$

$$د + لا + ۲ (ب + م) + لا + ج + ۲ طہ + ن$$

اور میں تحلیل کیا جاسکتا ہے۔ اگر طہ کو اس کی تین قیمتیں طہ<sup>۱</sup>، طہ<sup>۲</sup>، طہ<sup>۳</sup> دی جائیں تو ابتدائی چار درجی کے دو درجی اجزائے ضربی کے تین زوج حاصل ہوتے ہیں اور مسئلہ بالکلیہ حل ہو جاتا ہے۔

اس حل اور جذروں والے حل میں جو تعلق ہے اسکو واضح کرنے کے لئے فرض کرو کہ مندرجہ بالا ترتیب میں لکھے ہوئے دو درجی اجزائے ضربی کی اہلیں بہ، جہ اور عہ، ضہ ہیں اور یہ کہ دو درجی اجزائے بقیہ زوجوں کی اہلیں سیطج، جہ، عہ اور بہ، ضہ، عہ بہ اور جہ، ضہ ہیں تو

$$ب + جہ = \frac{۲}{۱} (ب - م) + جہ + عہ = \frac{۲}{۱} (ب - م) + عہ + بہ = \frac{۲}{۱} (ب - م)$$

$$عہ + ضہ = \frac{۲}{۱} (ب + م) + بہ + ضہ = \frac{۲}{۱} (ب + م) + جہ + ضہ = \frac{۲}{۱} (ب + م)$$



یہاں

$$\sqrt[3]{\text{م}^3 - \text{ب}^2 - \text{راج} + \text{ا}^3 \text{ط}^3} = \sqrt[3]{\text{م}^3 - \text{ب}^2 - \text{راج} + \text{ا}^3 \text{ط}^3}$$

$$\sqrt[3]{\text{م}^3 - \text{ب}^2 - \text{راج} + \text{ا}^3 \text{ط}^3}$$

ان آخری مساواتوں میں سے دو دو مساواتیں لیکر ایک کو دوسرے میں سے تفریق کیا جائے تو

$$\text{ب} + \text{ج} - \text{ع} - \text{ض} = \frac{\text{م}^3}{\text{ا}} - \frac{\text{م}^3}{\text{ا}} = 0$$

$$\text{ع} + \text{ب} - \text{ج} - \text{ض} = \frac{\text{م}^3}{\text{ا}}$$

اور چونکہ

$$\text{ع} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ض} = -\frac{\text{م}^3}{\text{ا}}$$

اسلئے

$$\text{ا} + \text{ع} + \text{ب} = -\frac{\text{م}^3}{\text{ا}} + \frac{\text{م}^3}{\text{ا}} + \frac{\text{م}^3}{\text{ا}}$$

$$\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} = -\frac{\text{م}^3}{\text{ا}} + \frac{\text{م}^3}{\text{ا}} + \frac{\text{م}^3}{\text{ا}}$$

$$\text{ا} + \text{ج} + \text{ب} = -\frac{\text{م}^3}{\text{ا}} + \frac{\text{م}^3}{\text{ا}} + \frac{\text{م}^3}{\text{ا}}$$

$$\text{ا} + \text{ض} + \text{ب} = -\frac{\text{م}^3}{\text{ا}} + \frac{\text{م}^3}{\text{ا}} + \frac{\text{م}^3}{\text{ا}}$$

اس لئے یہ معلوم ہوتا ہے کہ چار درجی کی اصلیں یہاں ایسے ضابطوں

(131)

سے علیحدہ علیحدہ بیان ہوئی ہیں جو دفعہ ۶۱ کے ضابطوں کے مماثل ہیں۔

مذکورہ تین یعنی 'م'، 'م'، 'م' فی الحقیقت یوکر کے کعبی کی اصلوں

کے مماثل ہیں۔ نیز 'م'، 'م'، 'م' میں شامل ہونیوالے جذروں کی

علامتوں پر ایسی قید موجود ہے جو دفعہ ۶۱ میں مانگ کر وہ قید کے متناہ ہے۔ کیونکہ دو درجی

اجزائے ضربی کی اصلوں کے لحاظ سے جو مفروضات اور پر تسلیم کئے گئے ہیں

ان کی وجہ سے ہمیں مساوات

۱ (بہ + جہ - عہ - ضہ) (جہ + عہ - بہ - ضہ) (عہ + بہ - جہ - ضہ) = ۶۴ م م م م  
ملتی ہے جو ربط ذیل کو مستلزم ہے (دیکھو مثال - ۲ صفحہ ۱۲)

$$۱ م م م = \frac{۱}{۲} گ$$

اور اس ربط کے ذریعہ م م م م کی علامتیں متعین ہوتی ہیں جیسا کہ  
دفعہ ۱ سابق میں واضح کیا جا چکا ہے۔

اس آخری مساوات کی مدد سے ہم م م کو اصلوں کے جلوں سے  
ساقط کر سکتے ہیں اور اس طرح چار درجی کی سب اصلوں کو (جیسا کہ دفعہ ۶۱  
میں کیا گیا) ایک واحد ضابطہ میں یعنی

$$۱ لا + ب = م + م - \frac{گ}{۲ م م}$$

میں حاصل کرتے ہیں جس میں جذور

$$م = \sqrt{۱ ب - لا + ۲ ط م} \text{ اور } م = \sqrt{۱ ب - لا + ۲ ط م}$$

پوری عمومیت کے ساتھ لئے گئے ہیں۔

## مثالیں

۱۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں ل م نہ ہوں یعنی

$$بہ + جہ + عہ - ضہ + جہ + عہ + بہ - ضہ$$

چار درجی کے دو درجی اجزاء کے ضربی کے آخری سروں کو جمع کرنے سے

$$بہ + جہ + عہ - ضہ = ۴ ط م + ۲ \frac{ج}{۱}$$

$$جہ + عہ + بہ - ضہ = ۴ ط م + ۲ \frac{ج}{۱}$$

$$عہ + بہ - جہ - ضہ = ۴ ط م + ۲ \frac{ج}{۱}$$

جہاں  $ط_۱$ ،  $ط_۲$ ،  $ط_۳$  محول کعبی کی اصلیں ہیں۔ پس مطلوبہ مساوات حاصل ہو جاتی ہے  
(دیکھو دفعہ ۳۹، مثالیں ۴، ۵)۔

جواب :- (۱۱-ج<sup>۲</sup>) - ۴ع (۱۱-ج<sup>۲</sup>) + ۱۶ جے = ۰  
۲ - مثال مانتوں کی مساواتوں کے ذریعہ محول کعبی کی اصلوں کو چار درجی کی  
اصولوں کی رقوم میں بیان کرو۔ (182)

ج<sup>۲</sup> کی بجائے اسکی قیمت عہ، بہ، جہ، ضہ کی رقوم میں درج کرنے  
سے فوراً معلوم ہوتا ہے کہ

۱۲ ط<sub>۱</sub> = ۲ لہ - مہ - نہ ≡ (جہ - عہ) (بہ - ضہ) - (عہ - بہ) (جہ - ضہ)  
۱۲ ط<sub>۲</sub> = ۲ مہ - نہ - لہ ≡ (عہ - بہ) (جہ - ضہ) - (بہ - جہ) (عہ - ضہ)  
۱۲ ط<sub>۳</sub> = ۲ نہ - لہ - مہ ≡ (بہ - جہ) (عہ - ضہ) - (جہ - عہ) (بہ - ضہ)  
۳ - مثال (۱) میں ط<sub>۱</sub>، ط<sub>۲</sub>، ط<sub>۳</sub> کے لئے جو جملے حاصل ہوئے ہیں انکے  
ذریعہ دفعہ ۶۱ مثال ۵ کے آنتیوں کی تصدیق کرو جن سے چار درجی اور محول کعبی کی  
اصلیں مربوط ہوتی ہیں۔

۴ - وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں ہوں

$\frac{1}{8} (بہ + جہ - عہ - ضہ) (بہ + جہ - عہ - ضہ) - \frac{1}{8} (جہ - عہ - بہ - ضہ) (جہ - عہ - بہ - ضہ)$   
 $\frac{1}{8} (عہ - بہ - جہ - ضہ) (عہ - بہ - جہ - ضہ) - \frac{1}{8} (بہ - جہ - عہ - ضہ) (بہ - جہ - عہ - ضہ)$   
چار درجی کے دو درجی اجزائے ضربی سے ہم معلوم کرتے ہیں

$$\frac{۱۴}{۱} = بہ + جہ - عہ - ضہ - \frac{۱۲}{۱} = بہ جہ - عہ ضہ$$

نیز  $ص ۱۲ = باج - ۱د + ۲ب ط - ۱ = ۱د - ۲ب ط$   
جہاں مطلوبہ کعبی کی اصلیں  $فہ$ ،  $فہ$ ،  $فہ$  سے تعبیر کی گئی ہیں۔  
اسلئے ہم مطلوبہ مساوات محول کعبی کے ایک خطی استقامت سے حاصل کرتے ہیں۔

جواب :- (۱د + باج - ۲ب ط) - باع (۱د + باج - ۲ب ط) + ۲ب جے = ۰

۵۔ وہ مساوات بناؤ جسکی اعلیٰ ہیں

$$\frac{ب + ج - ع - ض}{ب + ج - ع - ض} = \frac{ب + ج - ع - ض}{ب + ج - ع - ض}$$

اگر ذہن میں سے کسی تفاعل کو بلا امتیاز تعبیر کرے اور اس کے جواب میں محول کعبی کی اصل طہ سے تعبیر ہو تو پچھلے نتیجوں کو استعمال کرنے سے

$$\frac{ب + ج - ع - ض}{ب + ج - ع - ض} = \frac{ب + ج - ع - ض}{ب + ج - ع - ض}$$

اور اسلئے ہم مطلوبہ مساوات محول کعبی کے ایک ہم درجہ امتحان سے حاصل کرتے ہیں۔  
اس ضابطہ کو زیادہ سہولت بخش شکل

$$\frac{ب + ج - ع - ض}{ب + ج - ع - ض} = \frac{ب + ج - ع - ض}{ب + ج - ع - ض}$$

میں رکھا جاسکتا ہے جسکے ذریعہ مطلوبہ کعبی شکل ذیل میں حاصل ہوتا ہے:-

$$ب + ج - ع - ض = (ب + ج - ع - ض) + (ب + ج - ع - ض)$$

$$ب + ج - ع - ض = (ب + ج - ع - ض) + (ب + ج - ع - ض)$$

جس کو پھیلا کر ذہن سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$ب + ج - ع - ض = (ب + ج - ع - ض) + (ب + ج - ع - ض)$$

(دیکھو مثال ۱۴ صفحہ ۱۲)

83)

۶۔ وہ مساوات بناؤ جسکی اعلیٰ ہیں

$$\frac{ب + ج - ع - ض}{ب + ج - ع - ض} = \frac{ب + ج - ع - ض}{ب + ج - ع - ض}$$

یہ ذہن کی تین قیمتیں ہیں دیکھو دفعہ ۶۳۔ پہلے کی طرح انہیں سے کسی قیمت کو ذہن سے تعبیر کیا جائے تو مطلوبہ مساوات محول کعبی سے ہم درجہ استعمال

$$\frac{۲ب ج د - ۱ د^۲ - س ب^۲ + ۴ ل ب د ط}{ج - ۱ ط} = ۴$$

کے ذریعہ حاصل ہو سکتی ہے۔

۷۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں ہیں

$$\frac{۶}{ب ج د - ع د^۲} \quad \frac{۶}{ج د - ع د^۲} = ۶$$

$$\frac{(ج د + ع) - (ج د - ع)}{(ج د + ع) - (ج د - ع)} = \frac{۶}{۶}$$

$$\frac{۲ع}{۲ج د} = ۱$$

$$(ج د + ع) - (ج د - ع) = ۲ع$$

مطلوبہ مساوات محول کعبی سے ہم رسم استعمال

$$\frac{۲ج د - ب س + ۲ ل د ط}{د - ج س + ۱ س ط} = ۲$$

کے ذریعہ حاصل ہوتی ہے۔

اس نتیجہ کو مثال ۵ سے اخذ کیا جاسکتا ہے وہ اس طرح کہ اصلوں کو ان کے  
شکلیوں میں تبدیل کیا جائے اور اس تبدیلی کے جواب میں سرور میں تبدیلیاں  
عمیل میں لائی جائیں۔

۶۴۔ چار درجی کو دو درجی اجزائے ضربی میں تحلیل کرنا۔ دوسرا طریقہ

فرض کرو کہ چار درجی

$$۱ ل^۲ + ۲ ب ل + ۱ ج ل^۲ + ۴ د ل + س$$

کو دو درجی اجزائے ضربی

$$(۱ ل + ۲ ف ل + ق) (۱ ل + ۲ ف ل + ق)$$

میں تحلیل کیا گیا ہے۔ ان دو شکلوں کا مقابلہ کرنے سے

$$\left\{ \begin{array}{l} ۱ ل + ۲ ف ل + ق = ۱ ل^۲ + ۲ ب ل + ۱ ج ل^۲ + ۴ د ل + س \\ ۱ ل + ۲ ف ل + ق = ۱ ل^۲ + ۲ ب ل + ۱ ج ل^۲ + ۴ د ل + س \end{array} \right. \dots (۱)$$



مساواتوں کے ساتھ مقابلہ کیا جائے تو یہ معلوم ہوگا کہ فہ وہی ہے جو طہ دفعہ مابقی میں تھا۔ اور اس لئے ہم یہ پیش بینی کرتے ہیں کہ ف، ق، ق، ق کے استقاط سے فہ میں ایسی مساوات حاصل ہونی چاہئے جو حاصل کردہ محول کبھی کے عامل ہو۔ عام طور پر اگر فہ سے ل، مہ، نہ کے فرقوں کا کوئی تفاعل تعبیر ہو جس کا لازمی نتیجہ یہ ہوگا کہ اس سے عہ، بہ، جہ، ضہ کے فرقوں کا ایک جفت تفاعل تعبیر ہوگا (دیکھو دفعہ ۲، مثال ۱۸) تو وہ مساوات جس کی اصلیں فہ کی مختلف قیمتیں ہوں ایسی ہوگی کہ اس کے سر، ا، ہ، ع، اور جے کے تفاعل ہونگے۔

اگر فہ حسب ذیل مثالوں میں سے دوسری مثال کے جملوں میں سے کسی ایک کے مساوی فرض کیا جائے تو فہ میں وہ مساوات جسکی اصلیں اس جملہ کی مختلف قیمتیں ہوں حسب شرح بالا ف، ق، ق، ق کے ساقط کرنے سے حاصل ہوگی۔

## مثالیں

(135)

$$۱ - ی + ۶ ی + ی + ۲ گ ی + ا ع - ۳ ھ$$

کو دو درجی اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔  
اس شکل کا عامل ضرب

$$(۲ ی + ی + ق) (ی - ۲ ی + ق)$$

کے ساتھ مقابلہ کرو تو ف کے لئے حسب ذیل مساوات ملیگی:-

$$۲ ی + ۶ ی + ۲ ی + ۱۲ (۲ ھ - ۱۲) = ۲ گ - ۱۲$$

(دیکھو دفعہ ۶۱)

$$اور \quad ۲ ی + ۶ ی + ۲ ی = ۱۲ (۲ ھ - ۱۲) (۲ ی + ق - ۱۲)$$

رکھنے سے یہ مساوات،  $۱^۲$  سے تقسیم کر نیکے بعد ہو جائیگی

$$۴۱^۲ - ۳۰۰ - ۳۰۰ = ۰$$

۲۔ اگر ایک چار درجی جملہ کو دو دو درجی اجزائے ضربی

$$۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + ۴^۲ = ۱۰۰$$

میں تحلیل کیا جائے تو ثابت کرو کہ (۱)  $۱^۲$  ایک کعبی مساوات سے حاصل ہوتا ہے جبکہ وہ تمام ایسی ممکن قیمتیں اختیار کرے جو حسب ذیل نمونوں میں سے ہر ایک کے متناظر ہیں:-

$$۱^۲ + ۲^۲ = ۵، ۱^۲ + ۳^۲ = ۱۰، ۱^۲ + ۴^۲ = ۱۷، ۲^۲ + ۳^۲ = ۱۳، ۲^۲ + ۴^۲ = ۲۰، ۳^۲ + ۴^۲ = ۲۵$$

(د-ف)  $۱^۲$ ، (ف-ف)  $۲^۲$ ، (ق-ق)  $۳^۲$ ، (ق-ق)  $۴^۲$  اور (۲)  $۱^۲$  نہ ایک چھ درجی مساوات سے حاصل ہوتا ہے جبکہ وہ تمام ایسی قیمتیں اختیار کرے جو

$$۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ = ۱۴، ۱^۲ + ۲^۲ + ۴^۲ = ۲۱، ۱^۲ + ۳^۲ + ۴^۲ = ۳۰، ۲^۲ + ۳^۲ + ۴^۲ = ۳۵$$

کے متناظر ہیں۔  
ان تفاضلوں کو اصولوں کی رقوم میں بیان کرنے سے ہر تفاعل کی ممکن قیمتوں کی تعداد معلوم ہوتی ہے۔

۶۵۔ چار درجی کا متکافی شکل میں استحالہ۔ اس استحالہ کو عمل میں

لانیکے لئے ہم مساوات

$$۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + ۴^۲ = ۱۰۰$$

$$۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + ۴^۲ = ۱۰۰$$

جہاں

$$۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + ۴^۲ = ۱۰۰$$



(دیکھو دفعہ ۳۵)۔ اگر یہ مساوات متکافی ہو تو ک اور س معلوم کر نیکی لے  
ہمیں دو مساواتیں ملتی ہیں یعنی

$$ا^۱ ع^۱ = ع^۲، ک ع^۱ = ک ع^۲$$

ک کو ساقط کرنے سے ک کے لئے حسب ذیل مساوات حاصل ہوتی ہے

$$ا^۱ ع^۱ - ع^۲ = ۰$$

اور چونکہ

$$ک ع^۱ = ع^۲ = ا^۱ ع^۱ + ۳ ب ع^۱ + ۳ ج ع^۱ + د$$

اس لئے ک کی ہر قیمت کے جواب میں ک کی دو قیمتیں مساوی مگر مختلف  
ہیں۔

مساوات

$$ا^۱ ع^۱ - ع^۲ = ۰$$

کو جب اندراجات (۳۶، ۳۷)

$$ا^۱ ع^۱ = ع^۲ + ۳ ب ع^۱ + ۳ ج ع^۱ + گ$$

$$ا^۱ ع^۱ = ع^۲ + ۳ ب ع^۱ + ۳ ج ع^۱ + گ$$

کے ذریعہ تحویل کیا جائے تو وہ ہو جاتی ہے

$$ا^۱ ع^۱ + (د ع^۱ - ۱۲ ا^۱ ع^۱) - ۳ ب ع^۱ - گ = ۰ \quad (۱)$$

جو ایک کبھی مساوات ہے جس سے  $ا^۱ ع^۱ = ۳ ب ع^۱ + ۳ ج ع^۱ + گ$  کی تعیین ہوتی ہے  
اور اگر ہم رکھیں

$$ا^۱ ع^۱ = ۳ ب ع^۱ + ۳ ج ع^۱ + گ$$

تو معیاری تحول کبھی

$$۴ \text{ ر }^۲ \text{ ط} - ع \text{ ر } ط + جے = .$$

سے طہ متعین ہو جاتا ہے۔  
اس استحالہ کو چار درجی کے حل کرنے میں استعمال کیا جاسکتا ہے اور یہ یاد رکھنا ضروری ہے کہ کعبی (۱) جو یہاں پیش ہوا ہے دفعہ ۶۲ کے کعبی سے صرف استقدر فرق رکھتا ہے کہ اس کی اصلیں اس کی اصلوں سے مختلف الطاء ہیں۔

اب ہم ک اور ص کو چار درجی کی اصلوں عہ، یہ، جہ، ضہ کی رقوم میں بیان کریں گے۔ چونکہ مائی مساوات جو لا = ک + م + ص رکھنے سے چل ہوئی ہے متکافی ہے اسلئے اسکی اصلیں شکل م، م، م، م، م کی ہیں۔ پس ہم لکھ سکتے ہیں

$$ع = ک + م + ص، یہ = ک + م + ص، جہ = ک + م + ص$$

$$ضہ = ک + م + ص$$

اور اس لئے

$$(ع - ص) (ص - م) = (پہ - ص) (ص - جہ) = ک^۲$$

جس سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$ص = \frac{پہ جہ - عہ ضہ}{پہ + جہ - عہ - ضہ}$$

$$ک^۲ = \frac{(جہ - عہ) (عہ - پہ) (ضہ - جہ) (جہ - ضہ)}{(پہ + جہ - عہ - ضہ)^۲}$$

187)

۱۔ چار درجی مساوات کو متکافی شکل میں تبدیل کر کے حل کرنیکا یہ طریقہ سٹرایس۔ ایس گریٹ ہیڈ (S. S. Great head) نے کیمبرج متھامیٹیکل جرنل جلد اول میں بیان کیا ہے۔

ک اور م جو اس استعمال میں داخل ہوتے ہیں انکی ایک اہم ہندسی تعبیر دیکھا جاسکتی ہے۔ ایک خط مستقیم پر ایک ثابت مبدا و نو اور فرض کرو کہ اس پر گئے چار نقطوں 'ا' 'ب' 'ج' 'د' کے فاصلے 'ا' 'ب' 'ج' 'د' مساوات

$$ا + ا + ۲ = ب + لا + ۶ = ج + لا + ۲ = د + لا + ۲ =$$

کی اصلوں 'ع' 'ب' 'ج' 'د' سے متعین ہو گئے ہیں۔ نیز فرض کرو کہ دو درجی مساواتوں کے حسب ذیل تین درجہ

$$(ا - ب) (ب - ج) = ۰, (ب - ج) (ج - د) = ۰, (ج - د) (د - ا) = ۰$$

$$(ا - ب) (ب - ج) = ۰, (ب - ج) (ج - د) = ۰, (ج - د) (د - ا) = ۰$$

$$(ا - ب) (ب - ج) = ۰, (ب - ج) (ج - د) = ۰, (ج - د) (د - ا) = ۰$$

سے درجہ کے جو تین نظام متعین ہوتے ہیں ان کے مرکز 'و'، 'و'، 'و' اور ان کے آسکے 'ف'، 'ف'، 'ف' اور 'ف'، 'ف'، 'ف' ہیں۔ تب ہم مساواتیں لیں

$$و + ب = و + ج = و + د = و + ا = \text{وغیرہ}$$

جملہ متعین کر کے مساواتوں

(ب - و) (ج - و) = (و - ا) (و - ب) = (و - ج) (و - د) = (و - د) (و - ا) = ۰ وغیرہ کے ساتھ مقابلہ کیا جائے تو یہ ثابت ہوتا ہے کہ 'و' کی تین قیمتیں 'و'، 'و'، 'و' ہیں یعنی ثابت مرکز سے درجہ کے تین مرکزوں کے فاصلے نیز چونکہ 'و' = 'و' اسلئے 'ک' کی چھ قیمتیں ہیں جو ہندسی طور پر فاصلوں

$$و + و + و + و + و + و = و + و + و + و + و + و$$

سے تعبیر ہوتی ہیں جہاں 'و' + 'و' + 'و' = ۰ وغیرہ کیونکہ فاصلے مخالف سمتوں میں ناپے گئے ہیں۔

ہم صرف ہندسی نقطہ نگاہ سے درجہ کے مرکزوں اور ماسکوں کو



$$- گ ع^۱ + ۳ ه ع^۲ + ۳ ه^۲ =$$

حاصل ہوتی ہے جہاں  $ع^۱ = ۱ + ۳ + ب -$   
 سر کی قیمتیں بہ آسانی حاصل ہوتی ہیں

$$\begin{array}{r} \text{بہ جہ} - ع^۲ \quad ۱ \quad \text{جہ عہ} - ۲ \quad ۱ \quad \text{عہ بہ} - ۲ \quad ۱ \\ \hline \text{بہ} + \text{جہ} - ۲ \quad عہ \quad \text{جہ} + \text{عہ} - ۲ \quad بہ \quad \text{عہ} + \text{بہ} - ۲ \quad عہ \end{array}$$

اس صورت میں ہندسی تعبیر یہ ہے کہ اگر محور پر تین نقطے 'ا' 'ب' 'ج' لئے جائیں اس طور پر کہ 'ب' اور 'ج' کے لحاظ سے 'ا' کا موسیقی مزدوج (دوہو) 'ج' اور 'ا' کے لحاظ سے 'ب' کا 'ب' 'ا' اور 'ب' کے لحاظ سے 'ج' کا 'ج' تو 'ا' اور 'ب' کی قیمتیں حسب ذیل ہوں گی:-

$$۱ = ۱ + ۱ = ۲, ۱ - ۱ = ۰$$

عہ 'بہ' جہ کی رقوم ہیں 'ا' 'ب' 'ج' کی قیمتوں کے لئے دیکھو  
 مثال ۱۳ صفحہ (۱۲۰) -

۶۶ - اصولوں کے متشکل تفاعلوں سے چار درجی کا حل - (139)

اس طریقہ سے چار درجی کے حل کو ایک کبھی کے حل میں تحويل کرنا اُس وقت ممکن ہے جب چار اصولوں عہ 'بہ' جہ 'نہ' کے ایسے تفاعل بنانا ممکن ہو جو صرف تین قیمتیں قبول کریں اگر اصولوں کو باہم دگر ہر طرح ایک دوسری جگہ بدل دیا جائے - دفعہ ۶۴ مثال ۲ کے حوالہ سے یہ معلوم ہو گا کہ اس نوعیت کے مختلف تفاعل وجود رکھتے ہیں - یہ تفاعل دفعہ ۵۹ کے متشکل تفاعلوں کی طرح یہ خاصیت رکھتے ہیں کہ تین تین کے کوئی ایسے دو جٹ اس طور پر مربوط ہوتے ہیں کہ کسی جٹ کا کوئی ایک تفاعل دوسرے جٹ کے ایک تفاعل کے ساتھ سروں کی رقوم میں ایک منطق ہم رسم ربط رکھتا ہے - اس مسئلہ کو ائذہ ثابت کیا جائیگا -

موجودہ حل کے مقاصد کو پیش نظر رکھ کر ہم وہ تفاعل استعمال کرتے ہیں

جن کا حوالہ دفعہ ۵۵ میں دیا گیا ہے کیونکہ ان سے بالراست چار درجی کی اصولوں کھینچے  
چلے سرور کی رقوم میں حاصل ہوتے ہیں۔ اس لئے اب ہم وہ مسادات بنائیں گے  
جنکی اصلیں

$$ت \equiv \left( \frac{ع + ط + ب + ط + ج + ط + ض}{۴} \right)^۲$$

کی تین قیمتیں ہوں جبکہ اصولوں کا ہر طرح ایک دوسرے کے ساتھ متبادلا کیا  
جائے اور ط = ۱ -  
یہ قیمتیں ہیں

$$ت \equiv \left( \frac{ب + ج - ع - ض}{۴} \right)^۲, \quad ت \equiv \left( \frac{ج + ع - ب - ض}{۴} \right)^۲, \quad ت \equiv \left( \frac{ع + ج - ب - ض}{۴} \right)^۲$$

اور چونکہ

$$(ب + ج - ع - ض) \equiv ۳ - ع + ۲ - ل - ۲ - م - ۲ - ن$$

$$۳ - (ع - ب) \equiv ۳ - ۳ - ع + ۲ - ل - ۲ - م - ۲ - ن = ۲۸ - \frac{۵}{۲}$$

اسلئے ت، ت، ت کی قیمتیں حسب ذیل حاصل ہوتی ہیں

$$\frac{۲ - ل - م - ن}{۱۲} - \frac{۵}{۲}, \quad \frac{۲ - م - ن - ل}{۱۲} - \frac{۵}{۲}, \quad \frac{۲ - ن - ل - م}{۱۲} - \frac{۵}{۲}$$

$$جس سے \quad ت + ت + ت = ۳ - \frac{۵}{۲}$$

پھر چونکہ

(140)

$$۳ - (۲ - ل - م - ن) = (۲ - ل - م - ن) + (۲ - ل - م - ن) + (۲ - ل - م - ن) = ۳ - \frac{۵}{۲} - (۲ - ل - م - ن)$$

$$اور \quad ۳ - (۲ - ل - م - ن) = \frac{۵}{۲} - ۲۲$$

اسلئے

$$ت_۳ + ت_۲ + ت_۱ + ت_۰ = ۳ - \frac{۲}{۹۶} - \frac{۱}{۹۶} = ۲ - (۳ - ۲) = ۲ - ۱ = ۱$$

$$ت_۳ + ت_۲ = \frac{۲}{۹۶}$$

پس وہ مساوات جس کی اصلیں  $ت_۳$ ،  $ت_۲$ ،  $ت_۱$ ،  $ت_۰$  ہیں ہو جاتی ہے

$$(۱) (۲) (۳) (۴) (۵) (۶) (۷) (۸) (۹) (۱۰) (۱۱) (۱۲) (۱۳) (۱۴) (۱۵) (۱۶) (۱۷) (۱۸) (۱۹) (۲۰) (۲۱) (۲۲) (۲۳) (۲۴) (۲۵) (۲۶) (۲۷) (۲۸) (۲۹) (۳۰) (۳۱) (۳۲) (۳۳) (۳۴) (۳۵) (۳۶) (۳۷) (۳۸) (۳۹) (۴۰) (۴۱) (۴۲) (۴۳) (۴۴) (۴۵) (۴۶) (۴۷) (۴۸) (۴۹) (۵۰) (۵۱) (۵۲) (۵۳) (۵۴) (۵۵) (۵۶) (۵۷) (۵۸) (۵۹) (۶۰) (۶۱) (۶۲) (۶۳) (۶۴) (۶۵) (۶۶) (۶۷) (۶۸) (۶۹) (۷۰) (۷۱) (۷۲) (۷۳) (۷۴) (۷۵) (۷۶) (۷۷) (۷۸) (۷۹) (۸۰) (۸۱) (۸۲) (۸۳) (۸۴) (۸۵) (۸۶) (۸۷) (۸۸) (۸۹) (۹۰) (۹۱) (۹۲) (۹۳) (۹۴) (۹۵) (۹۶) (۹۷) (۹۸) (۹۹) (۱۰۰)$$

یا گ کی بجائے اسکی قیمت دفعہ ۳ سے درج کرنے سے

$$۴ (۱) (۲) (۳) (۴) (۵) (۶) (۷) (۸) (۹) (۱۰) (۱۱) (۱۲) (۱۳) (۱۴) (۱۵) (۱۶) (۱۷) (۱۸) (۱۹) (۲۰) (۲۱) (۲۲) (۲۳) (۲۴) (۲۵) (۲۶) (۲۷) (۲۸) (۲۹) (۳۰) (۳۱) (۳۲) (۳۳) (۳۴) (۳۵) (۳۶) (۳۷) (۳۸) (۳۹) (۴۰) (۴۱) (۴۲) (۴۳) (۴۴) (۴۵) (۴۶) (۴۷) (۴۸) (۴۹) (۵۰) (۵۱) (۵۲) (۵۳) (۵۴) (۵۵) (۵۶) (۵۷) (۵۸) (۵۹) (۶۰) (۶۱) (۶۲) (۶۳) (۶۴) (۶۵) (۶۶) (۶۷) (۶۸) (۶۹) (۷۰) (۷۱) (۷۲) (۷۳) (۷۴) (۷۵) (۷۶) (۷۷) (۷۸) (۷۹) (۸۰) (۸۱) (۸۲) (۸۳) (۸۴) (۸۵) (۸۶) (۸۷) (۸۸) (۸۹) (۹۰) (۹۱) (۹۲) (۹۳) (۹۴) (۹۵) (۹۶) (۹۷) (۹۸) (۹۹) (۱۰۰)$$

ہوتا ہے۔  
عہ، ب، جہ، ضہ کو متعین کرنے کے لئے حسب ذیل مساواتیں ہیں

$$- عہ + ب + جہ - ضہ = ۴$$

$$عہ + ب - جہ - ضہ = ۴$$

$$اور نیز عہ + ب + جہ + ضہ = ۴$$

ان سے ہم معلوم کرتے ہیں

$$عہ = ۴ - ب - جہ - ضہ$$

$$ب = ۴ - عہ - جہ - ضہ$$

$$جہ = ۴ - عہ - ب - ضہ$$

$$ضہ = ۴ - عہ - ب - جہ$$

141)

نیز  $۱۳م$ ،  $۱۲م$ ،  $۱۱م$  کی متذکرہ بالا قیمتوں سے مساوات

$$۱۳م = ۱۲م = ۱۱م$$

حاصل ہوتی ہے جس کے ذریعہ ایک جذر کو دوسرے دو جذروں کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے اور پھر یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ اصل کے لئے عام ضابطہ وہی ہے جو پہلے حاصل ہو چکا ہے۔

اس دفعہ کے مضمون کے سلسلہ میں چار درجی کی اصولوں کے ایسے دو تفاعلوں کا ذکر کر دینا سہولت بخش ہے جو ایسے خواص رکھتے ہیں جو دفعہ ۵۹ میں کعبی کی اصولوں کے متناظر تفاعلوں کے ثابت شدہ خواص کے مشابہ ہیں بحوالہ بالا دفعہ کی ترتیم کے مائل ترتیم اختیار کرنے سے ان تفاعلوں کو لکھ نہ کی رقوم میں شکل ذیل میں لکھا جاسکتا ہے:-

ل = (بہ جہ + عہ ضہ) + سہ (جہ عہ + بہ ضہ) + سہ (عہ بہ + جہ ضہ)  
 م = (بہ جہ + عہ ضہ) + سہ (جہ عہ + بہ ضہ) + سہ (عہ بہ + جہ ضہ)  
 دفعہ ۶۲ مثال (۱) کی مساواتوں کے ذریعہ ان تفاعلوں کو محمول کعبی کی اصولوں کی رقوم میں شکل

$$\frac{۱}{۱۳} ل = طہ + سہ طہ + سہ طہ$$

$$\frac{۱}{۱۲} م = طہ + سہ طہ + سہ طہ$$

میں بیان کیا جاسکتا ہے۔ نیز ان کو دفعہ ۶۲ کی اُس مساوات کی مدد سے جوت اور طہ کو مربوط کرتی ہے  $۱۳م$ ،  $۱۲م$ ،  $۱۱م$  کی رقوم میں حسب طریقہ ذیل بیان کیا جاسکتا ہے

$$\frac{۱}{۱۳} ل = طہ + سہ طہ + سہ طہ$$

$$\frac{۱}{۱۲} م = طہ + سہ طہ + سہ طہ$$



یہ تفاعل لی اور مہ چار درجی کے نظریہ میں اتنی ہی اہمیت رکھتے ہیں جتنی اہمیت دفعہ ۵۹ کے تفاعل کبھی کے نظریہ میں رکھتے ہیں۔ ان جملوں کے مکعب چار مقداروں کے سادہ ترین تفاعل ہیں جنہی صرف دو قیمتیں ہوتی ہیں جبکہ ان مقداروں کو ہر طرح آپس میں تبدیل کیا جاتا ہے۔ وہ مندرجہ بالا محول کبھی کے محول دو درجی کی اصلیں ہیں اور چار درجی کے ہر بیان شدہ حل میں موجود رہتی ہیں۔

## مثالیں

(14)

۱۔ ثابت کرو کہ لی اور مہ اسلوں عہ بہ جہ ضہ کے فرقوں کے تفاعل ہیں۔

عہ بہ جہ ضہ کو بقدر ھ کے بڑھانے سے لی اور مہ غیر متغیر رہتے ہیں کیونکہ  $۱ + سہ + سہ = ۰$ ۔

۲۔ اسلوں عہ بہ جہ ضہ کے فرقوں کے مربوں کے حاصل ضرب کے سروں کی رقوم میں معلوم کرو۔

طہ ۱، طہ ۲، طہ ۳ کی رقوم میں لی اور مہ کی قیمتوں سے ہم بہ آسانی معلوم کرتے ہیں کہ

$$۱۲ طہ = لی + مہ - لی = مہ = (بہ - جم) (عہ - ضہ) (سہ - سہ)$$

$$۱۲ طہ = سہ لی + سہ مہ - سہ لی = سہ مہ = (جم - عہ) (بہ - ضہ) (سہ - سہ)$$

$$۱۲ طہ = سہ لی + سہ مہ - سہ لی = سہ مہ = (عہ - جم) (بہ - ضہ) (سہ - سہ)$$

پھر ان مساواتوں سے طرفین کی رقوم کو باہم ضرب دیکر اور یہ یاد رکھ کر کہ طہ ۱، طہ ۲، طہ ۳ مساوات

$$۴ ل + طہ - ع ل طہ + جے = ۰$$

کی اصلیں ہیں ہم یہ معلوم کرتے ہیں کہ

$$لی + مہ = ۴۲۲ - \frac{جے}{۴}$$

۱۔  $\bar{m}^2 = \bar{m}^2 - 3(\bar{b} - \bar{b})(\bar{c} - \bar{c})(\bar{d} - \bar{d})(\bar{e} - \bar{e})(\bar{f} - \bar{f})(\bar{g} - \bar{g})$   
نیز انہی رقموں کے مربعوں کو جمع کرنے سے

$$2 \bar{m}^2 = \frac{1}{4} (\bar{b} - \bar{b})(\bar{c} - \bar{c})(\bar{d} - \bar{d})(\bar{e} - \bar{e})(\bar{f} - \bar{f})(\bar{g} - \bar{g}) + (\bar{c} - \bar{c})(\bar{d} - \bar{d})(\bar{e} - \bar{e})(\bar{f} - \bar{f})(\bar{g} - \bar{g})(\bar{b} - \bar{b}) + (\bar{d} - \bar{d})(\bar{e} - \bar{e})(\bar{f} - \bar{f})(\bar{g} - \bar{g})(\bar{b} - \bar{b})(\bar{c} - \bar{c}) + (\bar{e} - \bar{e})(\bar{f} - \bar{f})(\bar{g} - \bar{g})(\bar{b} - \bar{b})(\bar{c} - \bar{c})(\bar{d} - \bar{d}) + (\bar{f} - \bar{f})(\bar{g} - \bar{g})(\bar{b} - \bar{b})(\bar{c} - \bar{c})(\bar{d} - \bar{d})(\bar{e} - \bar{e}) + (\bar{g} - \bar{g})(\bar{b} - \bar{b})(\bar{c} - \bar{c})(\bar{d} - \bar{d})(\bar{e} - \bar{e})(\bar{f} - \bar{f})$$

اور چونکہ

(۱۔  $\bar{m}^2$ ) = (۲۔  $\bar{m}^2$ ) + (۳۔  $\bar{m}^2$ )  
اسلئے ان مقداروں کی بجائے انکی قیمتیں قبل الذکر مساواتوں سے حاصل کر کے درج کرنے سے بالآخر ہمیں حاصل ہوگا

$$1(\bar{b} - \bar{b})(\bar{c} - \bar{c})(\bar{d} - \bar{d})(\bar{e} - \bar{e})(\bar{f} - \bar{f})(\bar{g} - \bar{g}) + 2(\bar{c} - \bar{c})(\bar{d} - \bar{d})(\bar{e} - \bar{e})(\bar{f} - \bar{f})(\bar{g} - \bar{g})(\bar{b} - \bar{b}) + 3(\bar{d} - \bar{d})(\bar{e} - \bar{e})(\bar{f} - \bar{f})(\bar{g} - \bar{g})(\bar{b} - \bar{b})(\bar{c} - \bar{c}) + 4(\bar{e} - \bar{e})(\bar{f} - \bar{f})(\bar{g} - \bar{g})(\bar{b} - \bar{b})(\bar{c} - \bar{c})(\bar{d} - \bar{d}) + 5(\bar{f} - \bar{f})(\bar{g} - \bar{g})(\bar{b} - \bar{b})(\bar{c} - \bar{c})(\bar{d} - \bar{d})(\bar{e} - \bar{e}) + 6(\bar{g} - \bar{g})(\bar{b} - \bar{b})(\bar{c} - \bar{c})(\bar{d} - \bar{d})(\bar{e} - \bar{e})(\bar{f} - \bar{f})$$

$$= 256(\bar{c} - \bar{c}) - 24(\bar{b} - \bar{b})$$

۳۔ دفعہ ۵۹ کی مساواتوں کا مقابلہ دفعہ ۵۸ کی مساواتوں کے ساتھ کر نیے  
ثابت کرو کہ قبل الذکر کے نتیجوں کو چار درجہ کے لئے توسیع دیا جاسکتی ہے اگر  
یہ۔  $\bar{b} - \bar{b}$ ،  $\bar{c} - \bar{c}$ ،  $\bar{d} - \bar{d}$ ،  $\bar{e} - \bar{e}$ ،  $\bar{f} - \bar{f}$ ،  $\bar{g} - \bar{g}$  کو علی الترتیب

$$- (\bar{b} - \bar{b})(\bar{c} - \bar{c})(\bar{d} - \bar{d})(\bar{e} - \bar{e})(\bar{f} - \bar{f})(\bar{g} - \bar{g}) - (\bar{c} - \bar{c})(\bar{d} - \bar{d})(\bar{e} - \bar{e})(\bar{f} - \bar{f})(\bar{g} - \bar{g})(\bar{b} - \bar{b}) - (\bar{d} - \bar{d})(\bar{e} - \bar{e})(\bar{f} - \bar{f})(\bar{g} - \bar{g})(\bar{b} - \bar{b})(\bar{c} - \bar{c}) - (\bar{e} - \bar{e})(\bar{f} - \bar{f})(\bar{g} - \bar{g})(\bar{b} - \bar{b})(\bar{c} - \bar{c})(\bar{d} - \bar{d}) - (\bar{f} - \bar{f})(\bar{g} - \bar{g})(\bar{b} - \bar{b})(\bar{c} - \bar{c})(\bar{d} - \bar{d})(\bar{e} - \bar{e}) - (\bar{g} - \bar{g})(\bar{b} - \bar{b})(\bar{c} - \bar{c})(\bar{d} - \bar{d})(\bar{e} - \bar{e})(\bar{f} - \bar{f})$$

میں بدل دیا جائے اور اس کے ساتھ ہی ۷ کو  $\frac{1}{4}$  ع میں اور ۶ کو ۱۶ جے میں۔

۶۔ چار درجہ کی مربع دار فرقوں کی مساوات۔ چوتھے باب

(دفعہ ۶۴) میں فرقوں کی مساوات بنانیکے عام مسئلہ کا ذکر کیا گیا تھا لکن انج  
نے یہ تجویز پیش کی تھی کہ اس مساوات کو کسی دی ہوئی عددی مساوات کی  
اصولوں کو جد کرنے کی غرض کے لئے استعمال کیا جائے چنانچہ اس نے اسکی  
اس استعمال کو پیش نظر رکھ کر مربع دار فرقوں کی مساوات کی عام شکلیں چوتھے  
اور پانچویں درجہ کی ان مساواتوں کے لئے محسوب کی تھیں جنہیں دوسری

رقم غائب تھی Traite de la Resolution des Equations Numeriques

نوٹ سوم)۔ اگرچہ علی مقاصد کے لئے اصولوں کو جدا کر نیکے وہ طریقے قابل ترجیح ہیں جو آئندہ بیان کئے جائینگے تاہم اس باب کے مضامین کے سلسلہ میں چار درجی کی مربع دار فرقوں کی مساوات کا ذکر کر دینا کافی دلچسپی کا باعث ہوگا۔ چنانچہ ہم عام سے عام شکل میں چار درجی کے لئے یہ مساوات محسوب کریں گے۔ دفعہ ۶۱ مثال، میں جو کچھ ثابت کیا گیا ہے اسکے مطابق یہ معلوم ہوگا کہ حاصل ہونیوالی مساوات کے سرسب کے سب 'د'، 'ھ'، 'ع' اور 'جے' کی رقوم میں بیان ہو سکتے ہیں۔

یہ مسئلہ فی الحقیقت اس کے مماثل ہے کہ حسب ذیل حاصل ضرب کو چار درجی کے سروں کی رقوم میں بیان کیا جائے:-

$$\{ \text{فہ} - (\text{بہ} - \text{جہ}) \} \{ \text{فہ} - (\text{جہ} - \text{دہ}) \} \{ \text{فہ} - (\text{دہ} - \text{ضہ}) \}$$

اس حاصل ضرب کو معلوم کرنا سب سے آسان طریقہ یہ ہے کہ ان چھ اجزاء ضربی ہیں سے دو دو کے جٹ بنائے جائیں اور ایسے تین حاصل ضربوں کو (جنکو ہم '۱'، '۲'، '۳' سے تعبیر کریں گے) علیحدہ علیحدہ محول لیبی کی اصولوں کی رقوم میں بیان کیا جائے اور آخر میں حاصل ضرب '۱'، '۲'، '۳' کو 'د'، 'ھ'، 'ع' جے کی رقوم میں بیان کیا جائے۔

$$1 \equiv \text{فہ} - (\text{بہ} - \text{جہ}) + (\text{جہ} - \text{دہ}) + (\text{دہ} - \text{ضہ})$$

اور دفعہ ۶۱ کے نتیجوں کی مدد سے ہم (بہ - جہ)، (جہ - دہ)، (دہ - ضہ) کے لئے یہ آسانی حسب ذیل جملے اخذ کرتے ہیں:-

$$1 \equiv (\text{طہ} - \frac{\text{ھ}}{\text{د}} - \frac{\text{طہ}}{\text{د}} - \frac{\text{طہ}}{\text{د}}) + (\text{طہ} - \frac{\text{ھ}}{\text{د}} - \frac{\text{طہ}}{\text{د}} - \frac{\text{طہ}}{\text{د}}) + (\text{طہ} - \frac{\text{ھ}}{\text{د}} - \frac{\text{طہ}}{\text{د}} - \frac{\text{طہ}}{\text{د}})$$

پس بغیر کسی شکل کے ہیں حاصل ہوتا ہے

$$1 \equiv \text{فہ} + (\text{طہ} + \frac{\text{ھ}}{\text{د}}) + (\text{طہ} + \frac{\text{ھ}}{\text{د}}) + (\text{طہ} + \frac{\text{ھ}}{\text{د}}) - \frac{\text{ع}}{\text{د}} - \frac{\text{طہ}}{\text{د}} - \frac{\text{طہ}}{\text{د}}$$

اختصار کی خاطر ترقیم

$$۱۶ \text{ھ} \equiv \text{ا}^۲ \text{ف}^۲ \text{ع} \equiv \text{ا}^۲ \text{ق}^۲ \text{جے} \equiv \text{ا}^۲ \text{س}^۲$$

$$\text{ق}^۲ + \text{ف}^۲ + \text{ا}^۲ \equiv \text{ق}^۲ + \text{پ}^۲$$

کو داخل کیا جائے تو  $\pi$  ہو جاتا ہے یہ  $۸ + \text{ط}^۲$  فہ -  $۲۸ + \text{ط}^۲$  طہم حاصل ضرب  $\pi, \pi, \pi$  کو مثال ۱۸ صفحہ (۱۲۸) سے تحویل کیا جائے تو

$$\text{پ}^۲ + ۳ \text{ق}^۲ \text{پ}^۲ - (۲ \text{ق}^۲ \text{فہ} + ۱۸ \text{س}^۲ \text{فہ}) - (۸ \text{س}^۲ \text{فہ} + ۱۲ \text{ق}^۲ \text{فہ})$$

$$+ (۳۶ \text{ق}^۲ \text{س}^۲ \text{فہ} + ۲۰ \text{س}^۲ \text{ا}^۲) = ۰$$

آخر لام پے کی قیمت درج کرنے سے ہمیں 'خ' 'ق' 'س' کی رقوم میں مرئ فرقوں کی مساوات ملے گی

$$\text{ق}^۲ + ۳ \text{ف}^۲ \text{فہ} + (۳ \text{خ}^۲ + ۲ \text{ق}^۲) \text{فہ} + (\text{خ}^۲ + ۸ \text{ف}^۲ \text{ق}^۲ - ۲۶ \text{س}^۲ \text{فہ}) + (۶ \text{خ}^۲ \text{ق}^۲ - ۴ \text{ق}^۲ - ۱۸ \text{ا}^۲ \text{ف}^۲) + ۹ \text{ق}^۲ (\text{خ}^۲ \text{ق}^۲ - ۶ \text{س}^۲ \text{فہ}) + ۲ \text{ق}^۲ \text{ق}^۲ - ۲۰ \text{س}^۲ \text{ا}^۲ = ۰$$

44)

'ا' 'ھ' 'ح' 'جے' کی رقوم میں یہ مساوات حسب ذیل ہوگی

$$\begin{aligned} & ۱۶ \text{فہ} + ۲۸ \text{ا}^۲ \text{فہ} + ۸ \text{ا}^۲ \text{ھ} + ۹۶ \text{ا}^۲ \text{ھ} + ۱۲ \text{ح}^۲ + ۳۲ \text{ق}^۲ \text{ح}^۲ + ۱۲۸ \text{ھ}^۲ \\ & + ۱۶ \text{ا}^۲ \text{ھ}^۲ - ۱۳ \text{ا}^۲ \text{جے} + ۱۶ \text{ا}^۲ \text{س}^۲ \text{ھ}^۲ - ۴ \text{ا}^۲ \text{ع}^۲ - ۲۸۸ \text{ا}^۲ \text{ھ}^۲ \text{جے} + ۱۱۵۲ \text{ا}^۲ \text{ھ}^۲ - ۱۳ \text{ا}^۲ \text{جے} + ۲۵۶ \text{ا}^۲ \text{ع}^۲ - ۲۰ \text{ا}^۲ \text{جے}^۲ = ۰ \end{aligned}$$

یہ قابل توجہ ہے کہ  $\pi$  کے لئے جو قیمت اوپر حاصل ہو گئی ہے اسکو مساوا  $\text{ط}^۲ \text{طہم} = \text{ط}^۲ - \frac{1}{4} \text{ا}^۲$  کی مدد سے طہم کے دو درجی تفاعل کے طور پر بیان کیا جاسکتا ہے اور اس کے بعد کا عمل حساب اس دو درجی اور محول کبھی کے

لے مرئ دار فرقوں کی مساوات کو اس شکل میں پہلے سٹر ایم۔ رابرٹس نے  
Nouvelles Annales de Mathematiques کی سولہویں جلد میں دیا تھا۔

درمیان طہ کو ماقط کرنے سے جاری رکھا جاسکتا ہے۔

۶۸۔ چار درجہ کی اصولوں کی نوعیت کی جانچ۔ اس تحقیقات کو جاری

کرنے سے پیشتر دفعہ ۴۳ میں جو بیان کیا گیا ہے اسکا دہرانا ضروری ہے اور وہ یہ کہ جب کسی جبری مساوات کی اصولوں کی نوعیت کے لحاظ سے کوئی شرط سروں کے ایک تفاعل کی علامت سے تعبیر ہو تو ان سروں کا حقیقی عددی مقداروں کو تعبیر کرنا فرض کر لیا جاتا ہے۔ مزید بریں یہ بھی تسلیم کر لیا جاتا ہے کہ سب سے بڑے درجہ کی رقم کا سر معدوم نہیں ہوتا جیسا کہ مذکورہ بالا دفعہ میں کیا گیا تھا۔ حسب سابق فرض کرو کہ ۵ سے سروں کا وہ تفاعل تعبیر ہوتا ہے (اس کو ہم میٹر کہیں گے) جسکو ایک مثبت عددی جزو ضربی سے ضرب دیا جائے تو وہ اصولوں کے فرقوں کے مربعوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔ اب دفعات گذشتہ کے ثابت شدہ مسئلوں سے مساوات ملتی ہے

(۱) (بہ - جب) (عہ - عہ) (عہ - بہ) (عہ - عہ) (بہ - ضہ) (جہ - ضہ) = ۵۲۵۶  
جہاں  $۵ = ۲۰ - ۲۴$

ذیل میں اصولوں کی نوعیت کی بحث کو سہولت کے مد نظر تین حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے یعنی (۱) جب ۵ معدوم ہو یا (۲) جب وہ منفی ہو یا (۳) جب وہ مثبت ہو۔

(۱) جب ۵ معدوم ہو تو مساوات میں مساوی اصلیں ہوتی ہیں۔

یہ امر ۵ کی مندرجہ بالا قیمت سے ظاہر ہے۔ اب چار مختلف صورتیں برآہ

ہوتی ہیں۔ (عہ) جب صرف دو اصلیں مساوی ہوں۔ اس صورت میں

ع اور جے علیحدہ علیحدہ معدوم نہیں ہوتے۔ (بہ) جب تین اصلیں مساوی

ہوں اس صورت میں علیحدہ علیحدہ ع =۔ اور جے =۔ (دیکھو مثال ۲

دفعہ ۶۱)۔ (جہ) جب اصولوں کے دو مختلف زوج مساوی ہوں۔

اس صورت میں شرطیں ہونگی گ = ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲ = ۱۳۔ (دفعہ ۶۱ مثال ۳)۔  
دفعہ ۳ کی مثال کے ذریعہ آسانی کے ساتھ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ یہ شرطیں  
مساوات ۵ = کو مستلزم ہیں۔ پس یہ دو مساواتیں، مساوات ۵ =  
کے ساتھ ملکر صرف دو شرطوں کے ماثل ہیں۔ (ضہ) جب سب اصلیں مساوی

ہوں۔ اس صورت میں دفعہ ۶۱ سے تین شرطیں ۵ =، ۶ =، ۷ =، اور جے =  
اختیار کی جاسکتی ہیں۔ ان کو ایک ایسی شکل میں لکھا جاسکتا ہے جو دفعہ ۴۳ کی  
صورت (۴) کی شرطوں کے لئے حاصل کردہ شکل کے مشابہ ہو۔

(۲) جب ۵ = منفی ہو تو مساوات کی دو اصلیں حقیقی اور دو اصلیں

خیالی ہوتی ہیں اصلوں کی رقوم میں ۵ کی قیمت سے اسکو اخذ کیا جاسکتا ہے  
کیونکہ جب سب اصلیں حقیقی ہوں تو ۵ صریحاً مثبت ہے اور جب ۵ =، ۶ =،  
جہ ۵ = کی بجائے مناسب خیالی جگہ یعنی ۵ = ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲  
درج کے جاتی ہیں تو فوراً یہ معلوم ہوتا ہے کہ ۵ مثبت ہے اُس وقت بھی جبکہ  
سب اصلیں خیالی ہوں۔

(۳) جب ۵ = مثبت ہو تو یا تو سب اصلیں حقیقی ہیں یا سب

اصلیں خیالی۔ اسکو بھی ۵ کی قیمت سے حاصل کیا جاسکتا ہے کیونکہ ۵ =  
کی بجائے ۵ = ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲ درج کرنے سے ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ ۵ = منفی ہے  
جبکہ دو اصلیں حقیقی اور دو اصلیں خیالی ہوں۔ اس لئے اس صورت میں  
یعنی جب ۵ = مثبت ہو سب اصلوں کا صرف یہ تفاعل ہی اصلوں کی نوعیت  
کو پوری طرح متغیر کرنے میں کافی نہیں ہے کیونکہ پھر بھی یہ امر مشتبہ رہ جاتا  
ہے کہ آیا سب اصلیں حقیقی ہیں یا سب خیالی۔ مزید شرطیں جو ان دو صورتوں  
میں تمیز پیدا کر دینے کے لئے ضروری ہیں پورے کے کبھی (دفعہ ۶۱) سے اس طرح  
حاصل کی جاسکتی ہیں :- سب اصلوں کے حقیقی اور مثبت ہونے کے لئے یہ ضرور

ہے کہ علامتیں کے بعد دیگرے مثبت اور منفی ہوں اور جب علامتیں اس نوعیت کی ہوں تو کبھی کوئی حقیقی منفی اصل نہیں رکھ سکتا۔ اس لئے ہم دفعہ ۶۱ مثال ۲ کی مدد سے اس صورت پر منطبق ہونیوالا امتداد درجہ ذیل عام نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں:-  
جب  $\Delta$  مثبت ہو تو ہر صورت میں چار درجہ کی سب اصلیں خیالی ہوتی ہیں سوائے اس صورت کے جب یہ شرطیں پوری ہوں کہ  $\Delta$  منفی اور  $\Delta^2 - 4\Delta$  منفی ہو اور ایسی صورت میں سب اصلیں حقیقی ہوں۔

## مثالیں

(146)

- ۱۔ ثابت کرو کہ اگر  $\Delta$  مثبت ہو یا اگر  $\Delta = 0$  (اور  $\Delta \neq 0$ ) تو کبھی کی اصلوں کا ایک زوج خیالی ہوگا۔
- ۲۔ ثابت کرو کہ اگر  $\Delta$  منفی ہو تو کبھی کی اصلیں:- (۱) سب حقیقی اور غیر مساوی (۲) دو مساوی یا (۳) دو خیالی ہونگی بوجہ اسکے کہ گ (۱) چھوٹا (۲) مساوی (۳) بڑا ہو۔  $\Delta^2 - 4\Delta$  سے۔
- ۳۔ اگر کبھی مساوات

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 = 0$$

کی دو اصلیں  $\Delta$  کے مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\Delta}{\Delta^2 - 4\Delta} = \frac{2\Delta}{\Delta^2 - 4\Delta} = 0$$

$$\text{جہاں } \Delta^2 - 4\Delta = 0 \Rightarrow \Delta^2 - 4\Delta + 4 = 0 \Rightarrow (\Delta - 2)^2 = 0 \Rightarrow \Delta = 2$$

$$\Delta^2 - 4\Delta + 4 = 0 \Rightarrow (\Delta - 2)^2 = 0 \Rightarrow \Delta = 2$$

$$(1) \Delta = 2 \Rightarrow (2)^2 - 4(2) + 4 = 0 \Rightarrow 4 - 8 + 4 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

۵۔ وہ شرط معلوم کرو کہ کبھی

$$۱\text{ لا}^۲ + ۳\text{ ب} + ۳\text{ ج} + ۱\text{ لا} + د$$

کو شکل

ل (لا - عم) + م (لا - بی) + ن (لا - جہ) +  
میں لکھا جاسکے جہاں عم، بی، جہ، کبھی مساوات

$$۱\text{ لا}^۲ + ۳\text{ ب} + ۳\text{ ج} + ۱\text{ لا} + د = ۰$$

کی اصلیں ہیں۔

شکلوں کا مقابلہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$۱ = ل + م + ن$$

$$- ب = ل + عم + م + بی + ن + جہ$$

$$ج = ل + عم + م + بی + ن + جہ$$

$$- د = ل + عم + م + بی + ن + جہ$$

نیز  $۱\text{ لا}^۲ + ۳\text{ ب} + ۳\text{ ج} + ۱\text{ لا} + د = ۰$  وغیرہ

اسلئے ان مساواتوں کو علی الترتیب د، ج، ب، ۱ سے ضرب دو اور جمع کرو  
تو مطلوبہ شرط حاصل ہوگی

$$(۱\text{ د} - ۱\text{ د}) - ۳(ب ج - ب ج) = ۰$$

۶۔ اگر عم، بی، جہ، کبھی مساوات

$$۱\text{ لا}^۲ + ۳\text{ ب} + ۳\text{ ج} + ۱\text{ لا} + د = ۰$$

کی اصلیں ہوں تو مساوات

$$\sqrt{۱\text{ لا}^۲ - عم} + \sqrt{۱\text{ لا}^۲ - بی} + \sqrt{۱\text{ لا}^۲ - جہ} = ۰$$

کو ناطق بناؤ اور نتیجہ کو ۱، ۱، ۱، ۱ کی رقوم میں بیان کرو۔



جواب :-  $115x + 260y + 28z = 528$ ۔  
۷۔ اگر دو درجی مساواتوں

$$x + 2y + 3z = 0, \quad x + 2y + 3z = 0$$

کی اصلیں  $x, y, z$  اور  $x, y, z$  ہوں تو وہ مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں  
عمدہ  $x, y, z$  کی چار قیمتیں ہوں۔

$$\text{فرض کرو } x = 1, y = 2, z = 3 \Rightarrow x + 2y + 3z = 14$$

جواب :-  $(x + 2y + 3z = 14)$ ۔

نوٹ :- یہ اور نیچے کی دو مثالیں نہ کوئی جذبات میں بیان کرنے سے نہیں مساواتوں  
کے سر شامل ہوں مل ہو سکتی ہیں۔

۸۔ مثال کی ترقیم استعمال کر کے وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں  $x + 2y + 3z = 14$

چار قیمتیں ہوں۔

$$\text{فرض کرو } x = 1, y = 2, z = 3 \Rightarrow x + 2y + 3z = 14$$

جواب :-  $(x + 2y + 3z = 14)$ ۔

اس مثال میں حاصل ہونی والا چار درجی ایسا ہے کہ گ =

۹۔ اسی صورت میں اگر  $x = 1, y = 2, z = 3$  تو وہ مساوات بناؤ جسکی  
اصلیں  $x, y, z$  کی مختلف قیمتیں ہوں۔

$$\text{فرض کرو } x = 1, y = 2, z = 3 \Rightarrow x + 2y + 3z = 14$$

جواب :-  $(x + 2y + 3z = 14)$ ۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ جب چار درجی میں ایک دوہری مل ہو تو اس کمی میں جسکی  
اصلیں  $x, y, z$  کی قیمتیں ہیں (دفعہ ۶۵) وہی دوہری مل ہوگی۔ نیز معلوم کرو کہ چار درجی

تین اصلیں مساوی ہوں تو یہ کبھی کیا ہو جاتا ہے۔

۱۱۔ اگر  $h$  اور  $j$  دونوں مثبت ہوں تو بلا واسطہ (یولر کے کبھی کی امداد کے بغیر) ثابت کرو کہ چار درجہ کی سب اصلیں خیالی ہیں۔

اصلوں کی رقوم میں  $h$  کے لئے جو جملہ ہے (مثال ۱۹ صفحہ ۷۲) اس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ جب  $h$  مثبت ہو تو خیالی اصلوں کا کم از کم ایک زوج  $h$  تک  $h$  ہونا چاہئے۔ اب سب اصلوں کو بقدر  $h$  کے گھٹانے سے اور انکو  $h$  سے تقسیم کرنے سے (کیونکہ ان استحالوں سے اصلوں کے دوسرے زوج  $h$  ضد کی نوعیت پر کوئی اثر نہیں پڑے گا اور نہ  $h$  اور  $j$  کی علامتوں پر) چار درجہ کو شکل ذیل میں رکھا جاسکتا ہے۔

$$(لا + ۱) (ق + ۲)$$

$$یا \quad لا + ۲ \quad ف + لا + ۲ \quad ق + ۱ \quad ج + ۱ \quad ج + ۱ \quad ج + ۱ \quad ج + ۱$$

$$جس سے \quad ۵ = ج - ۲ \quad ۲ = ق - ۲ \quad ۲ = ف - ۲ \quad ۲ = ج - ۲$$

اور اسلئے

$$ق - ۲ = ف = ج + ۱ = ج + ۱ = ج + ۱ = ج + ۱$$

$$یا \quad (ج - ۲) = (ج - ۲) = (ج - ۲) = (ج - ۲)$$

جس سے یہ ثابت ہے کہ  $h$  اور  $j$  ضد خیالی ہیں جب  $h$  اور  $j$  مثبت ہوں (دیکھو دفعہ ۶۱ مثال ۸)

148)

۱۲۔ اگر چار درجہ کی مساوی اصلوں کے دو مختلف زوج ہوں تو بلا واسطہ ثابت کرو کہ

$$۱۲ = ۲ = ۲ = ۲ = ۲ = ۲ = ۲ = ۲$$

اس صورت میں چار درجہ کو  $h$  سے تقسیم کیا جائے تو وہ شکل ذیل اختیار کرتا ہے

$$(لا - عه) (لا - یه) \equiv \left\{ (لا - عه) - \left( \frac{لا - عه}{۲} \right) \right\} = \left( \frac{لا - عه}{۲} \right)$$

جہاں  
اب شکلوں

ی<sup>۱</sup> - ک<sup>۲</sup> ی<sup>۱</sup> + ک<sup>۲</sup> ،  
ی<sup>۱</sup> + ۶ ھ<sup>۱</sup> ی<sup>۱</sup> + ۴ گ<sup>۱</sup> ی<sup>۱</sup> + ۲ ع<sup>۱</sup> - ۳ ھ<sup>۱</sup>  
اور  
کا مقابلہ کرو تو

۳ ھ<sup>۱</sup> = ک<sup>۲</sup> گ<sup>۱</sup> = ۰ ، ۲ ع<sup>۱</sup> - ۳ ھ<sup>۱</sup> = ک<sup>۲</sup>  
جن سے اوپر کے ربط فوراً حاصل ہو جاتے ہیں۔ طالب علم آسانی کے ساتھ  
ثابت کر سکتا ہے کہ یہ ربط دفعہ ۱۱ شامل ۳ کے ربطوں کے مسائل ہیں۔ نیز  
اس بات کا مشاہدہ کرنا ضروری ہے کہ اس صورت میں چار درجہ کے حل میں  
صرف ایک جذر المرئع شامل ہوتا ہے (جو دو درجہ (لا - عه) (لا - یه) کے حل  
سے حاصل ہوتا ہے)۔

۱۳۔ وہ شرط معلوم کرو کہ چار درجہ کی شکل

ل (لا + ۲ ف لا + ق) + م (لا + ۲ ف لا + ق) + ن  
میں رکھا جاسکے۔

اس صورت میں دوسرے اور چوتھے سروں کو ایک ساتھ ایک ہی  
استعمال سے خارج کیا جاسکتا ہے اور عام حل میں صرف دو جذر المرئع شامل ہوتے ہیں  
جواب :- گ = ۰

۱۴۔ ثابت کرو کہ چار درجہ

م (لا - ن) - ن (لا - م)

کے لئے جے معدوم ہوتا ہے۔

۱۵۔ اگر چار درجہ کی اعلیٰ عہ ، بھ ، ضہ ایک خط مستقیم پر کے مباد  
سے چار نقطوں کے فاصلوں کو تعبیر کریں تو ثابت کرو کہ جب یہ نقطے خط پر ایک

موسیقی تقسیم بناتے ہیں تو یوں کر کے کبھی کی اصلیں سلسلہ حسابیہ میں ہوتی ہیں اور دفعہ ۶۲ کے کبھی کی اصلیں سلسلہ موسیقیہ میں۔

۱۶۔ مساوات

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} = \frac{1}{11}$$

سے جو چار نقطے ایک خط مستقیم پر حاصل ہوتے ہیں مبداء سے ان کے فاصلوں سے چھ غیر موسیقی تفاعل بنتے ہیں۔ وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں یہ چھ تفاعل ہوں۔ وہ چھ غیر موسیقی نسبتیں یہ ہیں:-

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}$$

149)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \frac{(ع-جہ)(بہ)(ضہ)}{(جہ-عہ)(بہ-ضہ)} = \frac{لہ-مہ}{نہ-زہ} = \frac{طہ-۲}{طہ-۱} \\ \frac{1}{3} &= \frac{(بہ-جہ)(عہ-ضہ)}{(جہ-بہ)(عہ-ضہ)} = \frac{مہ-نہ}{لہ-زہ} = \frac{طہ-۲}{طہ-۱} \\ \frac{1}{4} &= \frac{(بہ-جہ)(عہ-ضہ)}{(جہ-بہ)(عہ-ضہ)} = \frac{مہ-نہ}{لہ-زہ} = \frac{طہ-۲}{طہ-۱} \\ \frac{1}{5} &= \frac{(جہ-عہ)(بہ-ضہ)}{(عہ-جہ)(بہ-ضہ)} = \frac{نہ-زہ}{لہ-مہ} = \frac{طہ-۳}{طہ-۲} \end{aligned}$$

جہاں

نیز وہ مساوات جسکی اصلیں

$$(بہ-جہ)(عہ-ضہ) (جہ-عہ)(بہ-ضہ) (عہ-جہ)(بہ-ضہ) (جہ-عہ)(بہ-ضہ)$$

ہیں کیوں

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} = \frac{1}{11}$$

میں سے ایک ہے۔ وہ مساوات جسکی اصلیں انہیں سے کسی کبھی کی اصلوں کی نسبتیں یہ تبدیل علامت ہوں یہ ہوگی

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} = \frac{1}{11}$$

جہاں  $\Delta \equiv \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$

فہ میں اس مساوات کی اصلیں مندرجہ بالا چھ غیر موسیقی نسبتیں ہیں۔  
اس مساوات کو زیادہ واضح شکل میں لکھا جاسکتا ہے جیسا کہ ذیل کے مسئلوں سے ظاہر ہوگا۔  
(۱) یہ چھ غیر موسیقی نسبتیں ان میں سے کسی ایک کی رقوم میں اس طرح بیان ہو سکتی ہیں

$$\text{فہ} = \frac{1}{\text{فہ}} = \frac{1}{\text{فہ}} = \frac{1}{\text{فہ}} = \frac{1}{\text{فہ}} = \frac{1}{\text{فہ}}$$

مساوات متماثلہ

(یہ - جہ) (عہ - ضہ) + (جہ - عہ) (بہ - ضہ) + (عہ - بہ) (جہ - ضہ) = ۰  
سے حسب ذیل روابط ملتے ہیں

$$\text{فہ} = \frac{1}{\text{فہ}} = \frac{1}{\text{فہ}} + \frac{1}{\text{فہ}} = \frac{1}{\text{فہ}} + \frac{1}{\text{فہ}} = \frac{1}{\text{فہ}} + \frac{1}{\text{فہ}}$$

اور ان سے تمام غیر موسیقی نسبتوں کو ان میں سے کسی ایک کی رقوم میں معلوم کیا جاسکتا ہے۔

(ب) اگر غیر موسیقی نسبتوں میں سے دو نسبتیں مساوی ہو جائیں تو فہ کی چھ قیمتیں - سہ اور - سہ ہونگی جن میں سے ہر ایک تین مرتبہ تکرار پائے گی اور اس صورت میں ۶ = ۰۔

کیونکہ فرض کرو  $\text{فہ} = \text{فہ}$  تو مندرجہ بالا رابطوں میں سے دوسرے سے

$$\text{فہ} - \text{فہ} = ۱ + ۱ = ۰$$

جس سے  $\text{فہ} = ۱$  - سہ یا - سہ

اور ان قیمتوں کو فہ کی بجائے (۱) میں درج کیا جائے تو تمام غیر موسیقی نسبتیں معلوم ہوتی ہیں۔  
نیز چونکہ

$$\frac{\text{لہ} - \text{مہ}}{\text{لہ} - \text{نہ}} + \frac{\text{مہ} - \text{نہ}}{\text{لہ} - \text{نہ}} = ۱ \text{ یا } \frac{\text{لہ} - \text{نہ}}{\text{لہ} - \text{نہ}} = ۱$$

اس لئے 
$$ع = ۱ - ۱ - ۱ + ۱ + ۱ = ۰$$

(ج) جب انیس سے ایک نسبت موسیقی ہو تو فہ کی چھ قمتیں - ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ ہیں جنہیں سے ہر ایک دوم تہہ تکرار پاتی ہے۔ اور اس صورت میں جے = ۰۔۔۔ کیونکہ اگر

فہ = ۱ تو 
$$\frac{۱}{۱} = ۱ - ۱ - ۱ + ۱ + ۱ = ۰$$
 یعنی ۲ لہ - مہ - نہ = ۰۔

جو جے کا ایک جزو ضربی ہے (دیکھو مثال ۱۸ صفحہ ۱۷۱)۔  
(د) یہ نتیجے اور ان کے عکس اُس چھ درجی مساوات کو جو فہ میں ہے شکل ذیل میں لکھنے سے ثابت کئے جاسکتے ہیں۔ (دیکھو مثال ۱۲ صفحہ ۱۷۱)۔

$$ع = (۱ + فہ) (۲ - فہ) (۱ - فہ) = ۱ - ۱ - ۱ + ۱ + ۱ = ۰$$

۱۷۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$\frac{(۱ - لا) لا}{(۱ - لا) لا} = \frac{(۱ + لا) لا}{(۱ + لا) لا}$$

کے حل حسب ذیل ہیں:-

$$۱ - ۱ = ۰$$
 جہاں طہ = ۱

۱۸۔ (عہ - یہ) (جہ - ضہ) کو طہ، طہ، طہ کے ایک منطق تفاعل کے طور پر بیان کرو اور پھر اسکو چار درجی کے سرول کی رقوم میں لکھو۔

جواب:- ۱۲۸ - (طہ - طہ) (طہ - طہ) (طہ - طہ) = ۰

(۱ + ۱ = ۰)

۱۹۔ (بہ - جہ) (جہ - ضہ) (جہ - ضہ) + (جہ - ضہ) (جہ - ضہ) (جہ - ضہ) + (جہ - ضہ) (جہ - ضہ) (جہ - ضہ) + (جہ - ضہ) (جہ - ضہ) (جہ - ضہ) = ۰

یہ متشاکل تفاعل جملہ

$$(م۱ - ل۱) + (ل۲ - م۲) + (م۲ - ل۲)$$

$$= ۲۵۶ (ط۱ - ط۲) (ط۲ - ط۱) (ط۱ - ط۲)$$

کے معادل ہے۔

۲۰۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں چار درجہ کی اصلوں میں سے دو درجہ کے حاصل ضرب ہوں۔

مطلوبہ مساوات جملہ

$$(ف۱ - ج۱) (ف۲ - ج۲) = (ف۱ - ل۱) (ف۲ - ل۲) = (ف۱ - م۱) (ف۲ - م۲)$$

کے نمونہ کے تین اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہے۔

جواب :- (۱)  $(ف۱ - ل۱) (ف۲ - ل۲) = (ف۱ - م۱) (ف۲ - م۲)$

$$+ (م۱ - ل۱) (م۲ - ج۲) = ۰$$

۲۱۔ وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں  $\frac{۱}{۲}$  سے مختلف قیمتیں ہوں۔

عربیہ، جہ، مضہ چار درجہ کی اصلیں ہیں۔

مطلوبہ مساوات جملہ

$$(ف۱ - ج۱) (ف۲ - ج۲) = (ف۱ - م۱) (ف۲ - م۲) = (ف۱ - ل۱) (ف۲ - ل۲)$$

$$= (ف۱ - ل۱) (ف۲ - ل۲) + (م۱ - ل۱) (م۲ - ج۲) = ۰$$

کے نمونہ کے تین اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہے۔

جواب :- (۱)  $(ف۱ - ل۱) (ف۲ - ل۲) = (ف۱ - م۱) (ف۲ - م۲)$

$$+ (م۱ - ل۱) (م۲ - ج۲) = ۰$$

۲۲۔ ثابت کرو

$$\frac{ع ۹}{۲} = \frac{۱}{۲(ع - ب)} \quad (۱)$$

طہ، طہ، طہ کی رقوم میں ع، ب، جہ، جہ کے لئے جو جملے ہیں ان سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲(ع - ب)} = \frac{۱}{۲} \left\{ \frac{طہ + طہ}{طہ - طہ} + \frac{طہ + طہ}{طہ - طہ} + \frac{طہ + طہ}{طہ - طہ} \right\}$$

جسکو ا، ع، ب کے رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے۔

۲۳ - ثابت کرو

$$۰ = \frac{طہ}{۲(طہ - طہ)} \quad (۲)$$

جبکہ ع = ۰ اور م، ۳ یا ۳ پ + ا کی شکل کا ہو جہاں پ ایک مثبت صحیح

عدد ہے۔

۲۴ - ثابت کرو کہ

$$ع \equiv ۶ \pmod{۲}$$

کو دو مربعوں کے فرق یا مجموعے کے طور پر بیان کیا جاسکتا ہے اگر  
جے = ۲ (ا ج س + ۲ ب ج د - ا د س - ۲ ج ب) = ۳

$$۱۶ \equiv (۱۱ + ۵ + ۱) + (۱۱ - ۵ - ۱) \pmod{۲}$$

$$۲ + (۱۱ - ۵ - ۱) + (۱۱ - ۵ - ۱) \pmod{۲}$$

اور (۱۱ - ۵ - ۱) + ۲ + (۱۱ - ۵ - ۱) + (۱۱ - ۵ - ۱) کا مل مرتب ہے اگر

$$(۱۱ - ۵ - ۱) = (۱۱ - ۵ - ۱) \pmod{۲}$$

یا جے = ۰

۲۵ - اگر مسادات



۱ لا + ۲ لا + ۳ لا + ۴ لا + ۵ لا + ۶ لا + ۷ لا + ۸ لا + ۹ لا + ۱۰ لا = ۰  
 کی اصلیں عہ، یہ، جہ، ضہ ہوں تو سروں لا، لا، لا، لا، لا، لا، لا، لا، لا، لا  
 ۱ لا - عہ + ۲ لا - یہ + ۳ لا - جہ + ۴ لا - ضہ = ۰

کو حل کرو۔

اگر ۱ عہ + ۲ یہ + ۳ جہ + ۴ ضہ = ۰  
 کو ناطق بنایا جائے اور عہ، یہ، جہ، ضہ کی بجائے سروں کو درج کیا جائے تو

$$(۳ لا - ۲ لا - ۱ لا) = ۰$$

اب ۱ لا، ۲ لا، ۳ لا کی بجائے عہ، عہ، عہ، عہ، عہ، عہ، عہ، عہ، عہ، عہ سے  
 اور تحویل کرنے سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$۱ لا + ۲ لا = \frac{۱}{۳} (۳ - ۲ - ۱)$$

۲۶ - چار درجی کی فرقوں کی مساوات اور تین مجموعوں کی مساوات معلوم کرو  
 (مثال ۲۱ صفحہ ۲۲۲) اور چار درجی کو صرف ایک استعمال کے ذریعہ حل کرو۔  
 لا کی بجائے لا + سر درج کرنے اور دفعہ ۶۵ کی ترقیم استعمال کرنے سے

$$۱ لا + ۲ لا + ۳ لا + ۴ لا + ۵ لا + ۶ لا + ۷ لا + ۸ لا + ۹ لا + ۱۰ لا = ۰$$

لا اور سر کے لئے ایسی قیمتیں فرض کیا جاسکتی ہیں کہ وہ دو مساواتوں

$$۱ لا + ۲ لا + ۳ لا + ۴ لا + ۵ لا + ۶ لا + ۷ لا + ۸ لا + ۹ لا + ۱۰ لا = ۰$$

کو پورا کریں جن سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ سر کی کسی قیمت کے جواب میں لا کی دو مساوی  
 اور مختلف علامت قیمتیں ہیں اور جب لا کو ساقط کیا جائے تو سر کے لئے  
 ہمیں چھٹے درجہ کی ایک مساوات ملتی ہے۔ سر اور لا کی قیمتوں کو اصلوں عہ، یہ، جہ، ضہ  
 کی رقوم میں حاصل کر نیکے لئے فرض کرو





$$(۶) (۷) (۸) (۹) (۱۰) =$$

۳۔ یہ متبادل ثابت کرو

$$(۱۰ - ۲) = (۱۰ - ۳) = (۱۰ - ۴) = (۱۰ - ۵) = (۱۰ - ۶)$$

اسکو اس طرح ثابت کیا جاسکتا ہے :- ع اور جے کی قیمتوں میں ۱ = رکھنے سے اور پھیلا نے سے یہ فوراً معلوم ہوتا ہے کہ ۵ کا وہ حصہ جس میں ۱ نہیں آتا شکل

$$(۱۰ - ۲) = (۱۰ - ۳) = (۱۰ - ۴) = (۱۰ - ۵) = (۱۰ - ۶)$$

میں تحویل کیا جاسکتا ہے -

اب ۱۰، ۱۰، ۱۰ کی جگہ ۱۰، ۱۰، ۱۰ رکھنے سے اور ان مقداروں کی بجائے دفعہ ۳ کی قیمتیں درج کرنے سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے -

۳۱۔ جب چار درجہ کی دو اصلیں مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ یو لڑکے کبھی کی دو اصلیں مساوی ہوتی ہیں جنکی مشترک قیمت

$$۱۲ - ۵ = ۷$$

$$۷$$

سے اور پھر یہ ثابت کرو کہ اس صورت میں چار درجہ کی باقی دو اصلیں حقیقی ہیں یا مساوی یا خیالی ہو جب اسکے کہ ۱۲ - ۵ = ۷ منفی ہو یا صفر یا مثبت ۳۲۔ ثابت کرو کہ (۱) جب چار درجہ کی مساوی اصلوں کے دو مختلف زوج ہوں تو مربع دار فرقوں کی مساوات کی آخری دو نہیں (دفعہ ۶) معدوم ہو جاتی ہیں اور شرطیں ۵ = ۱۲ - ۵ = ۷ حاصل ہوتی ہیں اور یہ کہ (۲) جب اسکی تین اصلیں مساوی ہوں تو اس مساوات کی آخری تین رتیں معدوم ہو جاتی ہیں اور شرطیں ۷ = ۱۲ - ۵ = ۷ حاصل ہوتی ہیں -

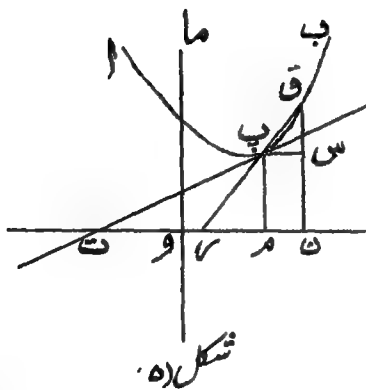
قبل الذکر صورت میں بتاؤ کہ یہ شرطیں ان شرطوں کے ساتھ مماثلت رکھتی ہیں جو مثال ۳ دفعہ ۶۱ اور مثال ۱۲ صفحہ (۲۱۷) میں حاصل ہوئی ہیں۔ نیز یہ بھی ثابت کرو کہ مربع دار فرقوں کی مساوات قبل الذکر صورت میں فہ (۱۲ + ۱۲) میں اور موخر الذکر صورت میں فہ (۱۲ + ۱۶) میں تحویل ہوتی ہے۔

---

# ساتواں باب

## مشق تفاعلون کے خواص

۶۹۔ مشتق تفاعل کی ترکیبی تعبیر



$$ف (لا + ہ) = ف (لا) + ف (لا) + ہ \frac{ف (لا)}{۲ \times ۱} + ..... + ہ$$

$$یعنی \frac{ف (لا + ہ) - ف (لا)}{ہ} = ف (لا) + ہ \frac{ف (لا)}{۲ \times ۱} + ..... + ہ (۱)$$

$$لیکن \frac{ف (لا + ہ) - ف (لا)}{ہ} = \frac{ق س}{م ن} = \frac{ق س}{پ س}$$

$$= مس ق پ س = مس پ س$$

اب اگر ہ کو غیر محدود گھا دیا جائے تو ق، پ کے نزدیک آتا ہے اور بالآخر اس پر منطبق ہو جاتا ہے، تو ترپ ق، نقطہ پ پر منحنی کا مماس بن جاتا ہے، زاویہ پیرن، پات م ہو جاتا ہے۔ نیز مساوات (۱) کی دائیں جانب کی تمام رقمیں سوائے پہلی رقم کے غیر محدود گھٹ جاتی ہیں اور بالآخر ہ =۔ کے لئے معدوم ہوتی ہیں۔ اس لئے مساوات (۱) ہو جاتی ہے

(155)

$$مس پات م = ف (لا)$$

جس سے ہم نتیجہ نکالتے ہیں کہ لا کی کسی قیمت کو درج کرنے سے مشتق تفاعل ف (لا) جو قیمت اختیار کرتا ہے وہ اس زاویہ کے مماس سے تعبیر ہوتی ہے جو تفاعل ف (لا) کو تعبیر کر نیوالے منحنی کے متناظر نقطہ پر کا مماس محور لا کے ساتھ بناتا ہے۔

۷۔ کشیر الارقام کی اعظم اور اقل قیمتیں۔ لا کی کوئی قیمت جو ف (لا) کو اعظم یا اقل بنادے مشتق مساوات ف (لا) =؛ کی ایک حل ہوتی ہے۔ فرض کرو کہ لا کو قیمت عہ دینے سے ف (لا) اقل ہوتا ہے۔ ہم ثناء کرینگے کہ ف (لا) =۔ فرض کرو کہ ہ سے لا کا چھوٹا اضافہ یا چھوٹا گھٹاؤ تعبیر ہوتا ہے۔ اب چونکہ ف (عہ) اقل ہے اس لئے

ف (ع) > ف (ع + ۵) نیز ف (ع) > ف (ع - ۵)  
پس ف (ع + ۵) - ف (ع) اور ف (ع - ۵) - ف (ع) دونوں مثبت  
ہیں یعنی ذیل کے دو جملے مثبت ہیں:-

$$ف (ع) + ۵ \frac{ف (ع)}{۲ \times ۱} + ۵ \frac{ف (ع)}{۲ \times ۱} + \dots$$

$$- ف (ع) + ۵ \frac{ف (ع)}{۲ \times ۱} - ۵ \frac{ف (ع)}{۲ \times ۱} + \dots$$

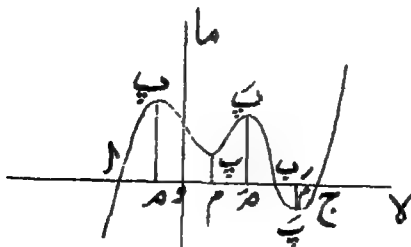
اب ہم یہ جانتے ہیں کہ جب '۵' بہت چھوٹا ہو تو ان جملوں کی علامتیں وہی  
ہوتی ہیں جو انکی پہلی رقموں کی ہیں۔ پس دونوں جملوں کو مثبت ہونیکے لئے  
ف (ع) کو معدوم ہونا چاہئے اور علاوہ ازیں ف (ع) کو مثبت ہونا چاہئے  
بالکل اسی طرح کے ثبوت سے یہ معلوم ہوگا کہ جب 'ف (ع) اعظم ہو تو

ف (ع) = - اور ف (ع) کو منفی ہونا چاہئے۔ اسلئے کثیر الارقام

ف (لا) کی اعظم اور اقل قیمتوں کو معلوم کر نیكے لئے مساوات ف (لا) = ۰ کو  
حل کر کے اسکی اصلوں کو ف (لا) میں درج کرنا چاہئے۔ ہر اصل سے ایک  
اعظم یا اقل قیمت ملے گی اور اعظم یا اقل قیمت کا امتیاز ف (لا) کی علامت سے  
ہوگا جب اسیں لا کی بجائے وہ اصل درج کیجائے چنانچہ جب 'ف (لا) منفی

ہو تو قیمت اعظم ہوگی اور جب 'ف (لا) مثبت ہو تو قیمت اقل -

(156)



شکل (۶)

اس دفعہ کا مسئلہ

دفعہ ۶۹ کے عمل سے

فوراً حاصل ہوتا ہے

کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ

جب 'ف (لا) کی قیمت

اعظم ہو جیسے پ پ



(شکل ۶) پریا اقل ہو جیسے پ ' پ پر تو معنی کا حماس محور وکلا کے متوازی ہو گا اور اس لئے

مس چات مہ = ف (لا) =  
 شکل ۶ پانچویں درجہ کے کثیر الارقام کو تعبیر کرتی ہے۔ ف (لا) = کی  
 چار اصلوں کے جواب میں (جنکا حقیقی ہونا اس صورت میں فرض کر لیا گیا ہے)  
 یعنی و م و م و م کے جواب میں دو اعظم تینیں م پ م پ  
 اور دو اقل تینیں م پ م پ ہیں۔

## مثالیس

۱۔ ف (۷)  $\equiv ۷۲ + ۷ - ۷$   
کی اعظم یا اقل قیمت معلوم کرو۔

$$f'(x) = f(x) + 1, \quad f'(x) = f(x)$$

لا۔۔۔  $\frac{1}{4}$  سے ف (لا) =  $\frac{4}{4}$  اور یہ اقل قیمت ہے۔

(دیکھو شکل ۲ صفحہ ۲۰)

۲۔ ف (لا)  $\equiv ۲لا - ۳لا - ۶لا + ۱۴$   
کی اعظم اور اقل قیمتیں معلوم کرو۔

$\text{ف}(\text{لا}) = (\text{لا} - \text{لا} - \text{لا})$  ف(لا) = لا - لا - لا

لا = ۲ سے ف (لا) = ۶۸ جو اعظم قیمت ہے۔

لا = ۳ سے ف (لا) = ۶۷ جو اقل قیمت ہے۔

$$3 = f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 1 = 1 - 2 + 3 - 1 = 1$$

کی اعظم اور اقل قیمتیں معلوم کرو۔

یہاں  $F = (L) =$  کی صرف ایک حقیقی اصل ہے  $L = M$  اور اس سے  
 اقل قیمت حاصل ہوتی ہے  $F = (L) = - ۳۴۵$ ۔

$$4 - f(l) \equiv 1 - l + l^2 + l^3 + \dots$$

کی اعظم اور اقل قیمتیں معلوم کرو۔

ف (۱) کی اصلیں تقریبی طور پر ۰.۳، ۰.۳۱، ۱ ہیں۔ پہلی اصل سے اعظم قیمت اور دوسری سے اقل قیمت حاصل ہوتی ہے۔ (دیکھو شکل ۳ صفحہ ۲۱)۔

۱۔ رول کا مسئلہ۔ مساوات ف (۱) = ۰ کی دو متصلہ حقیقی اصلوں ۱ اور ۲ کے درمیان مساوات ف (۱) = ۰ کی کم از کم ایک حقیقی اصل واقع ہوتی ہے۔

چونکہ ف (۱) کو مسلسل تفاعل مان لیا گیا ہے اسلئے جب ۱ سے ۲ تک بڑھتا ہے تو ف (۱) سے ف (۲) تک جانے میں ف (۱) کو ابتدا بڑھنا اور پھر گھٹنا چاہیے یا ابتدا گھٹنا اور پھر بڑھنا چاہیے۔ اس لئے ف (۱) سے ف (۲) تک جانے میں اس کو کم از کم ایک اعظم یا اقل قیمت میں سے گزرنا چاہیے۔ یہ قیمت (فرض کرو ف (۱) اور ۲ کے درمیان) ۱ کی کسی قیمت سے کہے جواب میں ہوگی جو دفعہ ۱۰ کے مسئلہ سے مساوات ف (۱) = ۰ کی ایک اصل ہے۔

دفعہ ۱ سابق کی شکل سے اس مسئلہ کی توضیح ہوتی ہے۔ یہ ہم اس شکل میں دیکھتے ہیں کہ دو نقاط تقاطع ۱ اور ۲ کے درمیان تین اعظم یا اقل قیمتیں ہیں اور دو نقطوں ۲ اور ۳ کے درمیان ایسی صرف ایک قیمت ہے۔ شکل سے یہ بھی ظاہر ہے کہ دو متصلہ نقاط تقاطع کے درمیان ایسی قیمتوں کی تعداد طاق ہوتی ہے۔

نتیجہ صریح۔ مشتق مساوات کی دو متصلہ اصلوں کے درمیان ابتدائی مساوات کی کسی اصل کا ہونا ضروری نہیں ہے اور کسی صورت میں بھی ان کے درمیان ابتدائی مساوات کی ایک سے زیادہ اصل نہیں ہو سکتی۔ اس مسئلہ کے پہلے حصہ سے صرف اس امر کی وضاحت ہوتی ہے کہ

ایک کثیر الارقام کی دو متصلہ صفر قیمتوں کے درمیان متعدد اعظم اور اقل قیمتیں ہوتی ہیں۔ اس کا دوسرا حصہ مسئلہ بالا سے فوراً اخذ ہو سکتا ہے کیونکہ اگر ف (لا) = کی دو متصلہ اصلوں کے درمیان ف (لا) = کی ایک سے زیادہ اصلیں ہوں تو ف (لا) = کی دو اصلیں ایسی ہوتی جن کے درمیان ف (لا) = کی کوئی اصل نہیں ہوگی اور یہ رول کے مسئلہ کے خلاف ہے۔

۷۲۔ مشتق تقاعلوں کی ترکیب۔ فرض کرو کہ مساوات ف (لا) =

کی اصلیں  $عم، عم، عم، ..... عن$  ہیں تو  
 $ف(لا) \equiv (لا-عم)، (لا-عم)، (لا-عم)، ..... (لا-عن)$   
 اس تہا نکل میں لا کی بجائے  $ما + لا$  درج کرو تو

$$f(m+l) = (m+l-1)(m+l-2)\dots(m+l-n)$$

1758 جہاں

$$Q_1 = \text{لا-عم}_1 + \text{لا-عم}_2 + \dots + \text{لا-عم}_n$$

$$Q_2 = (\text{لا-عم}_1)(\text{لا-عم}_2) + \dots + (\text{لا-عم}_1)(\text{لا-عم}_n) + (\text{لا-عم}_2)(\text{لا-عم}_n) + \dots + (\text{لا-عم}_{n-1})(\text{لا-عم}_n)$$

$$\dots + \binom{n}{n-1}(-1)^{n-1} = 0$$

$$+ (l_1 - e_1) \dots (l_{n-1} - e_{n-1}) + (l_1 - e_1) \dots (l_{n-1} - e_{n-1})(l_n - e_n) = \text{قسن}$$

کیں

$$f = f_1 + f_2 = f_1 + \frac{f_2}{2 \times 1} + \dots + \frac{f_n}{n \times 1} + \dots$$

۱۷۷



چونکہ ف (لا) سے ف (لا) اسی طرح حاصل ہوتا ہے جس طرح  
ف (لا) سے ف (لا) اسلئے ابھی ثابت کئے ہوئے مسئلہ سے یہ ظاہر ہے کہ  
ف (لا) میں (لا - عہ) ۱-۲ جزو ضربی کے طور پر شامل ہوگا۔ تیسرے مشتق  
تفاعل ف (لا) میں (لا - عہ) ۱-۲ شامل ہوگا اور علیٰ ہذا۔

نتیجہ صریح ۲۔ اگر ف (لا) اور اسکے پہلے (م - ۱) مشتق تفاعل  
سب کے سب لا کی قیمت عہ کے لئے معدوم ہو جائیں تو (لا - عہ) ۱-۲  
ف (لا) کا جزو ضربی ہوگا۔

یہ پچھلے نتیجہ صریح کا عکس ہے اور بلاد اسطہ آسانی کے ساتھ یوں ثابت کیا جا  
سکتا ہے:- مشتق تفاعلوں کو ف (لا) ۱، ف (لا) ۲، ....، ف (لا) ۱-۲ سے تعبیر کرو  
(دیکھو دفعہ ۶) اور لا کی بجائے عہ + لا - عہ درج کرو تو ف (لا) کو شکل ذیل  
میں پھیلا یا جاسکتا ہے:-

$$\begin{aligned} & \text{ف (عہ)} + \text{ف (عہ)} (لا - عہ) + \frac{\text{ف (عہ)}}{2 \times 1} (لا - عہ)^2 + \dots \\ & + \frac{\text{ف (عہ)}_1}{(1 - م) \times \dots \times 2 \times 1} (لا - عہ)^{1-م} + \frac{\text{ف (عہ)}_2}{م \times \dots \times 2 \times 1} (لا - عہ)^2 + \dots \\ & + \frac{\text{ف (عہ)}_ن}{ن \times \dots \times 2 \times 1} (لا - عہ)^ن \end{aligned}$$

جس سے مسئلہ کی صداقت ظاہر ہے۔

۴۔ ضعیفی اصولوں کی تعین۔ پچھلے دفعہ سے آسانی کے ساتھ یہ نتیجہ

نکالا جاسکتا ہے کہ اگر ف (لا) اور ف (لا) کا مشترک جزو ضربی (لا - عہ) ۱-۲  
ہو تو (لا - عہ) ۱، ف (لا) کا ایک جزو ہوگا۔ کیونکہ نتیجہ صریح (۱) کی رو سے

ف (لا) کے بعد کے (م - ۳) مشتق تفاعل 'ف (لا) اور ف (لا) کے ساتھ معدوم ہوتے ہیں جبکہ لا = ع۔ پس ف (لا) کی ایک اصل م رتبہ کی ہے۔ اسی طرح یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ اگر ف (لا) اور ف (لا) کے دوسرے مشترک اجزاء ضربی

(لا - ب) 'ف - ۱' (لا - ج) 'ق - ۱' (لا - ض) 'ل - ۱' وغیرہ

ہوں تو مساوات ف (لا) = کی ف اصلیں ب کے مساوی ہوں گی 'ق اصلیں ج کے مساوی 'ر اصلیں ض کے مساوی وغیرہ۔ اسلئے یہ معلوم کر نیکی لئے کہ کسی مجوزہ مساوات کی ضعیفی اصلیں موجود ہیں یا نہیں اور اگر موجود ہیں تو ان کی تعین کے لئے ہمیں ف (لا) اور ف (لا) کا مشترک مقسوم علیہ اعظم معلوم کرنا چاہیے۔ فرض کرو یہ ف (لا) ہے تو مساوی اصلوں کی تعین مساوات ف (لا) = کے حل پر منحصر ہوگی۔

## مثالیں

۱۔ مساوات

$$لا^۳ + لا^۲ - ۱۶ لا + ۲۰ = ۰$$

کی ضعیفی اصلیں معلوم کرو۔

ف (لا) اور ف (لا) کا مقسوم علیہ اعظم لا - ۲ ہے۔ پس (لا - ۲) '۲

ف (لا) کا ایک جزو ضربی ہے۔ دوسرا جزو لا + ۵ ہے۔

ف (لا) کے ضعیفی اجزاء ضربی کو معلوم کرنے کے بعد اگر باقی اجزاء ضربی حاصل کرنا ہو تو دفعہ ۸ کا تقسیم کا طریقہ متواتر استعمال کرنا سہولت بخش ہوگا۔ مثلاً یہاں ہم لا - ۲ سے دو مرتبہ تقسیم کرتے ہیں، عمل حساب کا طریقہ ذیل میں درج ہے :-

$$\begin{array}{r} ۱۶ - ۲۰ \\ ۲۰ - ۰ \\ \hline ۱۰ - ۳ \\ ۲ - ۱ \\ \hline ۵ - ۱ \end{array}$$

اس طرح دوسرا اور ۵ باقی رہ جاتے ہیں یعنی میسر جزو ضربی لا + ۵ ہے۔  
اس عمل سے گذشتہ نتیجہ کی تصدیق ہوتی ہے کہ ہر تقسیم کے بعد باقی معدوم ہوتے ہیں  
جیسا کہ ہونا چاہئے۔

۲۔ مساوات

$$۰ = ۱۰ - لا^۱ + لا^۱۵ - لا^۶ = ۰$$

کی ضعیفی اصلیں اور بقیہ جزو ضربی معلوم کرو۔

ف (لا) اور ف (لا) کا مقسوم علیہ اعظم لا<sup>۲</sup> + لا + ۱ ہے۔ پس (لا - ۱)<sup>۳</sup>  
ف (لا) کا ایک جزو ضربی ہے۔ لا - ۱ سے تین مرتبہ متواتر تقسیم کرنے پر ہمیں حاصل ہوگا  
ف (لا) = (لا - ۱) (لا<sup>۲</sup> + لا + ۱) (۱ + لا + لا<sup>۲</sup>)

۳۔ مساوات

$$۰ = لا^۲ - لا^۳ + لا^۱۲ + لا^۱۲ + لا^۳۶ = ۰$$

کی ضعیفی اصلیں معلوم کرو۔

ف (لا) اور ف (لا) کا مقسوم علیہ اعظم لا<sup>۲</sup> - لا - ۶ ہے۔ اس کے اجزا  
لا + ۲ اور لا - ۲ ہیں۔ پس

$$ف (لا) = (لا + ۲) (لا - ۲) (۳ - لا)$$

۴۔ کثیرالان مقام

$$۰ = لا^۶ - لا^۵ + لا^۵ + لا^۹ - لا^۱۲ - لا^۱۲ + لا^۸ = ۰$$

کے تمام اجزائے ضربی معلوم کرو۔

جواب :- ف (لا) = (لا - ۱) (لا + ۱) (لا - ۲) (لا + ۲)

کثیرالان مقام اور اس کے پہلے مشق کا مقسوم علیہ اعظم معلوم کر نیکاً معمولی عمل بہت  
محنت طلب ہوتا جائیگا جیسے جیسے تفاعل کا درجہ بڑھتا جائیگا اسلئے یہ کتنا درجہ اس کا دیکھنا نظر  
کی اکثر کتابوں میں کہنا جاتا ہے غلط ہے کہ عددی مساواتوں کی ضعیفی اصلوں کو معلوم کر نیکاً  
یہ طریقہ سادہ طریقہ ہے اور یہ کہ اصلوں کے متعلق مزید تحقیقات کے لئے ضروری ہے۔  
اسٹرم (Sturm) کے مسئلہ کے سلسلہ میں اس طریقہ کی کچھ عملی قدرت  
ہے۔ ہم ضعیفی اصلوں کی بحث کو دسویں باب تک ملتوی کرتے ہیں جہاں اس مسئلہ پر

غور کیا جائیگا۔ نیز گیارہویں باب میں یہ بتایا جائیگا کہ چھٹے درجہ سے کم درجوں کی مساواتیں ضعیفی اصلیں کسی مخصوص مثال میں سادہ طریقوں سے معلوم ہو سکتی ہیں جنہیں مقسوم علیہم نکالنے کی ضرورت نہیں پڑتی۔

۵۔ اس دفعہ اور اگلے دفعہ میں وہ مسئلے بیان کئے جائیں گے جو مساواتوں کی اصولوں کو جدا کر نیکے طریقوں کی آئینوالی بحث میں بہت اہم اور کارآمد ثابت ہونگے۔

**مسئلہ۔** مساوات  $F(لا) =$  کی حقیقی اصل  $ع$  سے ذرا چھوٹی  $لا$  کی قیمت  $ع - ہ$  سے ذرا بڑی قیمت  $ع + ہ$  تک مسلسل گزرنے میں کثیر الارقام  $F(لا)$  اور  $F(لا)$  کی علامتیں اصل میں سے گزرنے سے عین پہلے مختلف ہوتی ہیں اور گزرنیکے عین بعد موافق  $F(لا)$  اور  $F(لا)$  میں  $لا$  کی بجائے  $ع - ہ$  درجہ کرنے سے اور اور پھیلائے سے

$$F(ع - ہ) = F(ع) - F(ع) + \frac{F(ع) - ہ}{۲ \times ۱} - ..... -$$

$F(ع - ہ) = F(ع) - F(ع) + \frac{F(ع) - ہ}{۲ \times ۱} + ..... -$  اب چونکہ  $F(ع) =$  اسلئے ان جلوں کی علامتیں انکی پہلی رقموں پر منحصر ہونیکے وجہ سے مختلف ہیں۔ اگر  $ہ$  کی علامت بدلے جائے تو ان جلوں کی علامتیں ایک ہی ہوتی ہیں۔ اسلئے مسئلہ ثابت ہو گیا۔

**نتیجہ صریح۔** مسئلہ بالا درست رہتا ہے جب  $ع$  مساوات  $F(لا) =$  کی کسی رتبہ کی ضعیفی اصل ہو۔

فرض کرو کہ اصل  $ع$  مرتبہ تکرار پاتی ہے تو ذیل کے تفاعل (جنہیں زیر کی بجا لاحق استعمال ہوئے ہیں) سب کے سب معدوم ہوتے ہیں:-

$$F(ع) - F(ع) + F(ع) - F(ع) + ..... - F(ع) - F(ع)$$



(162)

ف (عہ - ہ) اور ف (عہ - ہ) کے سلسلوں میں وہ پہلی نہیں جو معدوم نہیں ہوتیں یہ ہیں

$$f(x) = \frac{f(x)}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^k)}$$

اور لا کی قیمت  $ع + ہ$  کے لئے انہی علامتیں ہیں

کیونکہ اصل میں سے گزرنے سے پہلے  $ف$  کی علامت  $ف$  کی علامت سے مختلف ہوتی چاہئے،  $ف$  کی علامت  $ف$  سے مختلف ہونی چاہئے اور علیٰ ہذا۔ اور اصل میں سے گزرنے کے بعد سب تفاعلوں کی علامتیں وہی ہونی چاہیں۔ یہاں ہم نے فی الحقیقت یہ تسلیم کیا ہے کہ  $ہ$  اس قدر چھوٹا ہے کہ  $ف$  (لا) = کی کوئی اصل اس واقعہ کے اندر داخل نہیں ہوتی جیسے سے لا گزرتا ہے۔

## مثالیں

۱۔ مساوات

$$ف (لا) = لا^۲ + لا^۳ + لا^۴ - لا^۵ - لا^۶ + لا^۷ = ۰$$

کی ضمنی اصلیں معلوم کرو۔

جواب :-  $ف (لا) = (لا^۲ + لا^۳ - لا^۴)$

۲۔ ثابت کرو کہ ثنائی مساوات

$$لا^۵ - لا^۴ = ۰$$

میں مساوی اصلیں نہیں ہو سکتیں۔

۳۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$لا^۵ - لا^۴ + لا^۳ + لا^۲ - لا = ۰$$

کی دو اصلیں مساوی ہوں گی اگر

$$ق = ۱ - ۵$$

۴۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$لا + ۵ = ف + لا + ۵ = ق =$$

کی دو اصلیں مساوی ہونگی اگر  $ق + ۲ = ف + ۵ =$  اور یہ کہ اگر مساوی اصولوں کا ایک زوج موجود ہو تو مساوی اصولوں کا ایک دوسرا زوج بھی موجود ہونا چاہئے۔  
۵۔ دفعہ ۲ کا طریقہ استعمال کر کے وہ شرط معلوم کر دو کہ کبھی مساوات  
 $ی + ۳ = ۵ ی + گ =$

کی دو اصلیں مساوی ہوں۔  
مقسوم علیہ اعظم معلوم کر نیکیے عمل میں آخری باقی کو معدوم ہو جانا چاہئے۔

$$جواب :- گ + ۲ = ۵ ی =$$

۶۔ اسی طریقہ کو استعمال کر کے بتاؤ کہ گ اور ۵ دونوں معدوم ہوتے ہیں جب کبھی کی تین اصلیں مساوی ہوں۔

$$۷۔ اگر چار درجہ (لا) = کی اصلیں عہ، بہ، جہ، ضہ ہوں تو ثابت کرو کہ$$

$$ف (عہ) + ف (بہ) + ف (جہ) + ف (ضہ)$$

کو تین اجزاء ضربی کے حاصل ضرب کے طور پر بیان کیا جاسکتا ہے۔

$$جواب :- (عہ + بہ - جہ - ضہ) (عہ + جہ - بہ - ضہ)$$

$$(عہ + ضہ - بہ - جہ)$$

$$۸۔ اگر ف (لا) = کی اصلیں عہ، بہ، جہ، ضہ وغیرہ ہوں اور ف (لا) =$$

کی اصلیں عہ، بہ، جہ، ضہ وغیرہ تو ثابت کرو کہ

$$ف (عہ) + ف (بہ) + ف (جہ) + ف (ضہ) = ..... ف (عہ) + ف (بہ) + ف (جہ) + ف (ضہ) =$$

اور یہ کہ ہر ایک اس مساوات کی رقم مطلق کے مساوی ہے جسکی اصلیں فرق تینے

مربط ہیں۔

$$۹۔ اگر مساوات$$

$$لا + ف لا + ۱ - ف لا + ۲ - ..... + ف لا + ۱ = ف$$

کی ایک دوہری اصل عہ ہو تو ثابت کرو کہ عہ، مساوات

$$ف لا + ۱ - ف لا + ۲ - ..... + ف لا + ۳ - ..... + ف لا + ۱ = ف$$

164)

کی ایک اصل ہے۔

۱۰۔ بتاؤ کہ کبھی

$$۱ \text{ لا} + ۳ \text{ ب} + ۳ \text{ لا} + ۳ \text{ ج} + ۳ \text{ د}$$

کی اعظم اور اقل قیمتیں مساوات

$$۱ \text{ لا} - ۲ \text{ ب} - ۲ \text{ گ} + ۳ \text{ د} = ۰$$

کی اصلیں ہیں جہاں ۵ مینز ہے۔

ف (لا) کو تعبیر کرینے والے معنی کو اگر محور یا کے متوازی (دیکھو دفعہ ۱۰) اعظم یا اقل قیمت ۳ کے مساوی فاصلے میں سے حرکت دی جائے تو محور لا معنی کا ماس ہو جائیگا یعنی مساوات ف (لا) - ۳ = ۰ مساوی اصلیں رکھے گی۔ پس اعظم اور اقل قیمتیں حاصل ہوتی ہیں ف (لا) - ۳ کا مینز بنانے سے یا گ + ۴ = ۰ میں د کی بجائے د - ۳ رکھنے سے۔

۱۱۔ اسی طرح ثابت کرو کہ

$$۱ \text{ لا} + ۴ \text{ ب} + ۳ \text{ لا} + ۶ \text{ ج} + ۴ \text{ د} + ۳ \text{ س}$$

کی اعظم اور اقل قیمتیں مساوات

$$۱ \text{ لا} - ۳ \text{ ب} - ۳ \text{ ج} - ۳ \text{ د} - ۳ \text{ س} + ۳ \text{ گ} + ۳ \text{ ح} - ۱۸ \text{ جے} - ۳ \text{ دے} = ۰$$

کی اصلیں ہیں جہاں ۵ چار درجہ کا مینز ہے۔

۱۲۔ تفاعل

$$۴ \text{ ف} (لا) = ۳ \text{ لا} - ۴ \text{ لا} + ۱۵ \text{ لا} - ۳ \text{ لا} + ۱۳$$

پر دفعہ ۶ کا مسئلہ استعمال کرو۔

یہاں

$$۴ \text{ ف} (لا) = ۳ \text{ لا} - ۴ \text{ لا} + ۱۵ \text{ لا} - ۳ \text{ لا} + ۱۳$$

$$۴ \text{ ف} (لا) = ۳ \text{ لا} - ۴ \text{ لا} + ۱۵ \text{ لا} - ۳ \text{ لا} + ۱۳$$

$$۴ \text{ ف} (لا) = ۳ \text{ لا} - ۴ \text{ لا} + ۱۵ \text{ لا} - ۳ \text{ لا} + ۱۳$$

$$۴ \text{ ف} (لا) = ۳ \text{ لا} - ۴ \text{ لا} + ۱۵ \text{ لا} - ۳ \text{ لا} + ۱۳$$

یہاں ۴ ف (لا) پہلا تفاعل ہے جو معدوم نہیں ہوتا جبکہ لا = ۱ اور

فہم (۱) منفی ہے۔ مسئلہ سے یہ ثابت ہے کہ ایک سے ذرا کم قیمت کے لئے  
 ف' فہم' فہم' کی علامتیں ہیں + - + - اور ایک سے ذرا بڑی  
 قیمت کے لئے ان سب کی علامتیں منفی ہیں۔ علامتوں کے اس سلسلہ سے ہم  
 تفاعلوں ف' فہم' وغیرہ کو نقطہ لا = ۱ کے قرب میں مرتب کر سکتے ہیں۔ چنانچہ  
 ف (لا) کو تعبیر کریں والا منفی ضعیفی نقطہ لا = ۱ تک پہنچنے سے قبل محور لا کے  
 اوپر ہے اور پہنچنے کے عین بعد محور کے نیچے اور محور منفی کو تین منطبق نقطوں پر قطع  
 کرتا ہے کیونکہ ف (لا) کا ایک جزو ضربی (لا - ۱) ہے۔ ف (لا) کو تعبیر  
 کریں والا منفی نقطہ لا = ۱ میں سے گزرنے سے پہلے اور بعد دونوں صورتوں میں  
 محور کے اوپر ہوگا۔ وہ محور کو اس نقطہ پر مس کریگا۔ فہم (لا) کو تعبیر کرنے والا  
 منفی نقطہ میں سے گزرنے سے پہلے محور کے اوپر اور گزرنے کے بعد محور کے نیچے ہوگا اور  
 محور کو اس نقطہ پر قطع کریگا۔

# آٹھواں باب

## اصولوں کے متشاكل تفاعل

[165]

۷۔ نیوٹن کا مسئلہ۔ اصولوں کی قوتوں کے مجموعے۔

اب ہم مساوات کی اصولوں کے متشاكل تفاعلوں کی بحث کی طرف رجوع کرتے ہیں۔ ان کا کچھ ذکر پہلے (صفحہ ۲۷) میں اچھا ہے یہاں ہم ان تفاعلوں سے متعلق چند عام مسائل ثابت کریں گے۔

مسئلہ ۱۔ کسی مساوات کی اصولوں کی متشابه قوتوں کے مجموعے سروں کے رقوم میں منطق طور پر بیان ہو سکتے ہیں۔  
فرض کرو کہ مساوات ہے

$$f(l) = l^k + b^k l^{k-1} + \dots + b^n$$

$\equiv (l - a_1)(l - a_2) \dots (l - a_n)$   
اب ہم سروں  $b^k, b^{k-1}, \dots, b^n$  کی رقوم میں  $a_1, a_2, \dots, a_n$  کو معنی عام ترقیم کے مطابق  $s_1, s_2, \dots, s_n$  کو محسوب کریں گے۔

$$f(l) = \frac{f(l)}{l - a_1} + \frac{f(l)}{l - a_2} + \dots + \frac{f(l)}{l - a_n}$$

$$\Sigma n \lambda^{n-1} + (n-1) b \lambda^{n-2} + (n-2) b^2 \lambda^{n-3} + \dots + 2 b^{n-2} \lambda + b^{n-1}$$

$$+ b^n - 1$$

اور دفعہ ۸ کے طریقہ سے تقسیم کیا جائے تو

$$f(\lambda) = \frac{\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} b + \lambda^{n-3} b^2 + \dots + \lambda b^{n-2} + b^{n-1}}{\lambda - b}$$

|                 |               |           |           |
|-----------------|---------------|-----------|-----------|
| $2-3$           | $1-2$         | $0-1$     | $0$       |
| $b^2 \lambda +$ | $b \lambda +$ | $b +$     | $1$       |
| $2-2$           | $1-1$         | $0$       | $0$       |
| $b^2 \lambda +$ | $b \lambda +$ | $b +$     | $1$       |
| $\dots +$       | $\dots +$     | $\dots +$ | $\dots +$ |
| $\dots +$       | $\dots +$     | $\dots +$ | $\dots +$ |

$$+ b^n - 1$$

اگر اس مساوات میں  $b$  کی بجائے مقداروں  $a, b, c, \dots, n$  میں سے ہر ایک کے بعد دیگرے رکھ دیجائے اور اگر  $s = \frac{1}{\lambda}$   $= \frac{1}{b}$   $= \frac{1}{c}$   $= \frac{1}{d}$   $= \frac{1}{e}$   $= \frac{1}{f}$   $= \frac{1}{g}$   $= \frac{1}{h}$   $= \frac{1}{i}$   $= \frac{1}{j}$   $= \frac{1}{k}$   $= \frac{1}{l}$   $= \frac{1}{m}$   $= \frac{1}{n}$  کی قیمت حسب ذیل حاصل ہوگی:۔

$$f(s) = \frac{s^{n-1} + s^{n-2} a + s^{n-3} a^2 + \dots + s a^{n-2} + a^{n-1}}{s - a}$$

|           |           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $2-3$     | $1-2$     | $0-1$     | $0$       |
| $a^2 s +$ | $a s +$   | $a +$     | $1$       |
| $2-2$     | $1-1$     | $0$       | $0$       |
| $a^2 s +$ | $a s +$   | $a +$     | $1$       |
| $\dots +$ | $\dots +$ | $\dots +$ | $\dots +$ |
| $\dots +$ | $\dots +$ | $\dots +$ | $\dots +$ |

$$+ a^n - 1$$

$$+ a^n - 1$$

اب ف (لا) کی اِثبات کا مقابلہ اسکی قبل الذکر قیمت کے ساتھ کیا جائے تو ہمیں ذیل کے ربط پیش آئے۔

$$\begin{aligned} \text{س}_1 + \text{ب}_1 &= \text{س}_0 \\ \text{س}_2 + \text{ب}_2 + \text{س}_1 + \text{ب}_1 &= \text{س}_0 \\ \text{س}_3 + \text{ب}_3 + \text{س}_2 + \text{ب}_2 + \text{س}_1 + \text{ب}_1 &= \text{س}_0 \\ \text{س}_4 + \text{ب}_4 + \text{س}_3 + \text{ب}_3 + \text{س}_2 + \text{ب}_2 + \text{س}_1 + \text{ب}_1 &= \text{س}_0 \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\text{س}_1 + \text{ب}_1 + \text{س}_2 + \text{ب}_2 + \dots + \text{س}_n + \text{ب}_n + \text{س}_{n-1} + \text{ب}_{n-1} + \dots + \text{س}_1 + \text{ب}_1 = \text{س}_0$$

یہ پہلی مسادات سے  $\text{س}_1, \text{ب}_1, \text{س}_2, \text{ب}_2, \dots, \text{س}_n, \text{ب}_n$  کی رقوم میں  $\text{س}_0$  معلوم ہوتا ہے، دوسری سے  $\text{س}_1, \text{ب}_1, \text{س}_2, \text{ب}_2, \dots, \text{س}_n, \text{ب}_n$  اور علیٰ ہذا القیاس یہاں تک کہ  $\text{س}_n, \text{ب}_n$  معلوم ہو جاتا ہے۔ چنانچہ ہم معلوم کرتے ہیں

$$\begin{aligned} \text{س}_1 &= \text{س}_0 - \text{ب}_1 = \text{س}_0 - \text{ب}_1 \\ \text{س}_2 &= \text{س}_1 - \text{ب}_2 = \text{س}_0 - \text{ب}_1 - \text{ب}_2 \\ \text{س}_3 &= \text{س}_2 - \text{ب}_3 = \text{س}_0 - \text{ب}_1 - \text{ب}_2 - \text{ب}_3 \\ \text{س}_4 &= \text{س}_3 - \text{ب}_4 = \text{س}_0 - \text{ب}_1 - \text{ب}_2 - \text{ب}_3 - \text{ب}_4 \\ &\dots \end{aligned}$$

یہ بتانے کے بعد کہ  $\text{س}_1, \text{س}_2, \text{س}_3, \dots, \text{س}_n$  کو کس طرح سروں کی رقوم میں محسوب کیا جاسکتا ہے ہم اب اپنے نتیجوں کی ایسی توسیع کرتے ہیں کہ اس سے اصولوں کی تمام مثبت قوتوں کے مجموعہ معلوم کئے جاسکیں۔ اس مقصد کے لئے ف (لا) کو  $\text{لا}_1, \text{لا}_2, \dots, \text{لا}_n$  سے ضرب دو تو

$$\text{لا}_1 \text{ ف (لا)} = \text{لا}_1 + \text{لا}_2 + \text{لا}_3 + \dots + \text{لا}_n$$



اس تمامہ میں لاکھ بے بعد دیگرے عم، عم، عم، ..... عن میں بدکر جمع کیا جائے تو

$$s_n = s_{n-1} + s_{n-2} + \dots + s_1$$

اب م کو یکے بعد دیگرے ن، ن، ا، ن، ۲، ..... قیمتیں دینے سے  
اور س، = ن کو پیش نظر رکھنے سے ہمیں اس آخری - ادات سے ذیل کے ربا ملے گا۔

$$s_n = s_{n-1} + b_{n-1} + \dots + b_1 + b_0 = 0,$$

$$s = s_{n+1} + b_1 s_n + b_2 s_{n-1} + \dots + b_n s_1 - s_0$$

$$s = s_{n+1} + s_n + \dots + s_2 + s_1 = 0.$$

پس اصولوں کی تمام مثبت قوتوں کے مجموعوں کو سرور کے منطبق تفاعلوں سے بیان کیا جاسکتا ہے۔ نیز دی ہوئی مساوات کو ایک ایسی مساوات میں تحویل کرنے سے جس کی اصلیں دی ہوئی مساوات کی اصولوں عم، عم، عم، عم کے عن کے متکافی ہوں اور ادیر کے ضابطوں کو استعمال کرنے سے اصولوں کی تمام معنی قوتوں کو بھی اسی طرح بیان کیا جاسکتا ہے۔

۷۸۔ مسئلہ ۲۔ کسی جبری مساوات کی اصولوں کے ہر منطق

متشاكل تفاعل کو مسروں کی قوم میں منطقی طور پر بیان کیا جاسکتا ہے۔

اس مسئلہ کو صرف صحیح تفاعلوں کے لئے ثابت کرنا کافی ہے کیونکہ کسری متشاکل تفاعلوں کو ایک واحد کسر میں تحویل کیا جاسکتا ہے جس کا شمار کنندہ اور نسب نامہ دونوں صحیح متشاکل تفاعل ہوں۔ ع<sup>۱</sup> ع<sup>۲</sup> ع<sup>۳</sup> ع<sup>۴</sup> ع<sup>۵</sup> ع<sup>۶</sup> ع<sup>۷</sup> ع<sup>۸</sup> ع<sup>۹</sup> ع<sup>۱۰</sup> ع<sup>۱۱</sup> ع<sup>۱۲</sup> ع<sup>۱۳</sup> ع<sup>۱۴</sup> ع<sup>۱۵</sup> ع<sup>۱۶</sup> ع<sup>۱۷</sup> ع<sup>۱۸</sup> ع<sup>۱۹</sup> ع<sup>۲۰</sup> ع<sup>۲۱</sup> ع<sup>۲۲</sup> ع<sup>۲۳</sup> ع<sup>۲۴</sup> ع<sup>۲۵</sup> ع<sup>۲۶</sup> ع<sup>۲۷</sup> ع<sup>۲۸</sup> ع<sup>۲۹</sup> ع<sup>۳۰</sup> ع<sup>۳۱</sup> ع<sup>۳۲</sup> ع<sup>۳۳</sup> ع<sup>۳۴</sup> ع<sup>۳۵</sup> ع<sup>۳۶</sup> ع<sup>۳۷</sup> ع<sup>۳۸</sup> ع<sup>۳۹</sup> ع<sup>۴۰</sup> ع<sup>۴۱</sup> ع<sup>۴۲</sup> ع<sup>۴۳</sup> ع<sup>۴۴</sup> ع<sup>۴۵</sup> ع<sup>۴۶</sup> ع<sup>۴۷</sup> ع<sup>۴۸</sup> ع<sup>۴۹</sup> ع<sup>۵۰</sup> ع<sup>۵۱</sup> ع<sup>۵۲</sup> ع<sup>۵۳</sup> ع<sup>۵۴</sup> ع<sup>۵۵</sup> ع<sup>۵۶</sup> ع<sup>۵۷</sup> ع<sup>۵۸</sup> ع<sup>۵۹</sup> ع<sup>۶۰</sup> ع<sup>۶۱</sup> ع<sup>۶۲</sup> ع<sup>۶۳</sup> ع<sup>۶۴</sup> ع<sup>۶۵</sup> ع<sup>۶۶</sup> ع<sup>۶۷</sup> ع<sup>۶۸</sup> ع<sup>۶۹</sup> ع<sup>۷۰</sup> ع<sup>۷۱</sup> ع<sup>۷۲</sup> ع<sup>۷۳</sup> ع<sup>۷۴</sup> ع<sup>۷۵</sup> ع<sup>۷۶</sup> ع<sup>۷۷</sup> ع<sup>۷۸</sup> ع<sup>۷۹</sup> ع<sup>۸۰</sup> ع<sup>۸۱</sup> ع<sup>۸۲</sup> ع<sup>۸۳</sup> ع<sup>۸۴</sup> ع<sup>۸۵</sup> ع<sup>۸۶</sup> ع<sup>۸۷</sup> ع<sup>۸۸</sup> ع<sup>۸۹</sup> ع<sup>۹۰</sup> ع<sup>۹۱</sup> ع<sup>۹۲</sup> ع<sup>۹۳</sup> ع<sup>۹۴</sup> ع<sup>۹۵</sup> ع<sup>۹۶</sup> ع<sup>۹۷</sup> ع<sup>۹۸</sup> ع<sup>۹۹</sup> ع<sup>۱۰۰</sup> ع<sup>۱۰۱</sup> ع<sup>۱۰۲</sup> ع<sup>۱۰۳</sup> ع<sup>۱۰۴</sup> ع<sup>۱۰۵</sup> ع<sup>۱۰۶</sup> ع<sup>۱۰۷</sup> ع<sup>۱۰۸</sup> ع<sup>۱۰۹</sup> ع<sup>۱۱۰</sup> ع<sup>۱۱۱</sup> ع<sup>۱۱۲</sup> ع<sup>۱۱۳</sup> ع<sup>۱۱۴</sup> ع<sup>۱۱۵</sup> ع<sup>۱۱۶</sup> ع<sup>۱۱۷</sup> ع<sup>۱۱۸</sup> ع<sup>۱۱۹</sup> ع<sup>۱۲۰</sup> ع<sup>۱۲۱</sup> ع<sup>۱۲۲</sup> ع<sup>۱۲۳</sup> ع<sup>۱۲۴</sup> ع<sup>۱۲۵</sup> ع<sup>۱۲۶</sup> ع<sup>۱۲۷</sup> ع<sup>۱۲۸</sup> ع<sup>۱۲۹</sup> ع<sup>۱۳۰</sup> ع<sup>۱۳۱</sup> ع<sup>۱۳۲</sup> ع<sup>۱۳۳</sup> ع<sup>۱۳۴</sup> ع<sup>۱۳۵</sup> ع<sup>۱۳۶</sup> ع<sup>۱۳۷</sup> ع<sup>۱۳۸</sup> ع<sup>۱۳۹</sup> ع<sup>۱۴۰</sup> ع<sup>۱۴۱</sup> ع<sup>۱۴۲</sup> ع<sup>۱۴۳</sup> ع<sup>۱۴۴</sup> ع<sup>۱۴۵</sup> ع<sup>۱۴۶</sup> ع<sup>۱۴۷</sup> ع<sup>۱۴۸</sup> ع<sup>۱۴۹</sup> ع<sup>۱۵۰</sup> ع<sup>۱۵۱</sup> ع<sup>۱۵۲</sup> ع<sup>۱۵۳</sup> ع<sup>۱۵۴</sup> ع<sup>۱۵۵</sup> ع<sup>۱۵۶</sup> ع<sup>۱۵۷</sup> ع<sup>۱۵۸</sup> ع<sup>۱۵۹</sup> ع<sup>۱۶۰</sup> ع<sup>۱۶۱</sup> ع<sup>۱۶۲</sup> ع<sup>۱۶۳</sup> ع<sup>۱۶۴</sup> ع<sup>۱۶۵</sup> ع<sup>۱۶۶</sup> ع<sup>۱۶۷</sup> ع<sup>۱۶۸</sup> ع<sup>۱۶۹</sup> ع<sup>۱۷۰</sup> ع<sup>۱۷۱</sup> ع<sup>۱۷۲</sup> ع<sup>۱۷۳</sup> ع<sup>۱۷۴</sup> ع<sup>۱۷۵</sup> ع<sup>۱۷۶</sup> ع<sup>۱۷۷</sup> ع<sup>۱۷۸</sup> ع<sup>۱۷۹</sup> ع<sup>۱۸۰</sup> ع<sup>۱۸۱</sup> ع<sup>۱۸۲</sup> ع<sup>۱۸۳</sup> ع<sup>۱۸۴</sup> ع<sup>۱۸۵</sup> ع<sup>۱۸۶</sup> ع<sup>۱۸۷</sup> ع<sup>۱۸۸</sup> ع<sup>۱۸۹</sup> ع<sup>۱۹۰</sup> ع<sup>۱۹۱</sup> ع<sup>۱۹۲</sup> ع<sup>۱۹۳</sup> ع<sup>۱۹۴</sup> ع<sup>۱۹۵</sup> ع<sup>۱۹۶</sup> ع<sup>۱۹۷</sup> ع<sup>۱۹۸</sup> ع<sup>۱۹۹</sup> ع<sup>۲۰۰</sup> ع<sup>۲۰۱</sup> ع<sup>۲۰۲</sup> ع<sup>۲۰۳</sup> ع<sup>۲۰۴</sup> ع<sup>۲۰۵</sup> ع<sup>۲۰۶</sup> ع<sup>۲۰۷</sup> ع<sup>۲۰۸</sup> ع<sup>۲۰۹</sup> ع<sup>۲۱۰</sup> ع<sup>۲۱۱</sup> ع<sup>۲۱۲</sup> ع<sup>۲۱۳</sup> ع<sup>۲۱۴</sup> ع<sup>۲۱۵</sup> ع<sup>۲۱۶</sup> ع<sup>۲۱۷</sup> ع<sup>۲۱۸</sup> ع<sup>۲۱۹</sup> ع<sup>۲۲۰</sup> ع<sup>۲۲۱</sup> ع<sup>۲۲۲</sup> ع<sup>۲۲۳</sup> ع<sup>۲۲۴</sup> ع<sup>۲۲۵</sup> ع<sup>۲۲۶</sup> ع<sup>۲۲۷</sup> ع<sup>۲۲۸</sup> ع<sup>۲۲۹</sup> ع<sup>۲۳۰</sup> ع<sup>۲۳۱</sup> ع<sup>۲۳۲</sup> ع<sup>۲۳۳</sup> ع<sup>۲۳۴</sup> ع<sup>۲۳۵</sup> ع<sup>۲۳۶</sup> ع<sup>۲۳۷</sup> ع<sup>۲۳۸</sup> ع<sup>۲۳۹</sup> ع<sup>۲۴۰</sup> ع<sup>۲۴۱</sup> ع<sup>۲۴۲</sup> ع<sup>۲۴۳</sup> ع<sup>۲۴۴</sup> ع<sup>۲۴۵</sup> ع<sup>۲۴۶</sup> ع<sup>۲۴۷</sup> ع<sup>۲۴۸</sup> ع<sup>۲۴۹</sup> ع<sup>۲۵۰</sup> ع<sup>۲۵۱</sup> ع<sup>۲۵۲</sup> ع<sup>۲۵۳</sup> ع<sup>۲۵۴</sup> ع<sup>۲۵۵</sup> ع<sup>۲۵۶</sup> ع<sup>۲۵۷</sup> ع<sup>۲۵۸</sup> ع<sup>۲۵۹</sup> ع<sup>۲۶۰</sup> ع<sup>۲۶۱</sup> ع<sup>۲۶۲</sup> ع<sup>۲۶۳</sup> ع<sup>۲۶۴</sup> ع<sup>۲۶۵</sup> ع<sup>۲۶۶</sup> ع<sup>۲۶۷</sup> ع<sup>۲۶۸</sup> ع<sup>۲۶۹</sup> ع<sup>۲۷۰</sup> ع<sup>۲۷۱</sup> ع<sup>۲۷۲</sup> ع<sup>۲۷۳</sup> ع<sup>۲۷۴</sup> ع<sup>۲۷۵</sup> ع<sup>۲۷۶</sup> ع<sup>۲۷۷</sup> ع<sup>۲۷۸</sup> ع<sup>۲۷۹</sup> ع<sup>۲۸۰</sup> ع<sup>۲۸۱</sup> ع<sup>۲۸۲</sup> ع<sup>۲۸۳</sup> ع<sup>۲۸۴</sup> ع<sup>۲۸۵</sup> ع<sup>۲۸۶</sup> ع<sup>۲۸۷</sup> ع<sup>۲۸۸</sup> ع<sup>۲۸۹</sup> ع<sup>۲۹۰</sup> ع<sup>۲۹۱</sup> ع<sup>۲۹۲</sup> ع<sup>۲۹۳</sup> ع<sup>۲۹۴</sup> ع<sup>۲۹۵</sup> ع<sup>۲۹۶</sup> ع<sup>۲۹۷</sup> ع<sup>۲۹۸</sup> ع<sup>۲۹۹</sup> ع<sup>۳۰۰</sup> ع<sup>۳۰۱</sup> ع<sup>۳۰۲</sup> ع<sup>۳۰۳</sup> ع<sup>۳۰۴</sup> ع<sup>۳۰۵</sup> ع<sup>۳۰۶</sup> ع<sup>۳۰۷</sup> ع<sup>۳۰۸</sup> ع<sup>۳۰۹</sup> ع<sup>۳۱۰</sup> ع<sup>۳۱۱</sup> ع<sup>۳۱۲</sup> ع<sup>۳۱۳</sup> ع<sup>۳۱۴</sup> ع<sup>۳۱۵</sup> ع<sup>۳۱۶</sup> ع<sup>۳۱۷</sup> ع<sup>۳۱۸</sup> ع<sup>۳۱۹</sup> ع<sup>۳۲۰</sup> ع<sup>۳۲۱</sup> ع<sup>۳۲۲</sup> ع<sup>۳۲۳</sup> ع<sup>۳۲۴</sup> ع<sup>۳۲۵</sup> ع<sup>۳۲۶</sup> ع

جہاں ن ایک عددی مستقل ہے، اور اگر یہ تفاعل متشاکل ہو تو ہم اس کو شکل  
 $\text{ن} \quad \text{ف} \quad \text{ع} \quad \text{ق}$  یعنی ن = ع ق عم ..... میں لکھ سکتے  
 ہیں کیونکہ تمام قسمیں ایک ہی نمونہ کی ہوں گی۔ اس لئے اگر ہم یہ ثابت کر دیں کہ اس  
 مقدار کو سروں کی رقوم میں مطلق طور پر بیان کیا جاسکتا ہے تو مسئلہ ثابت ہو جاتا  
 ہے۔ پہلے ہم متشاکل تفاعل  $\text{ن} \quad \text{ف} \quad \text{ع} \quad \text{ق}$  کی حسب ذیل قیمت ثابت کریں گے۔

$$3 \text{ عم } 1 \text{ عم } 2 = \text{ عم } 3 - \text{ عم } 4 \dots\dots\dots (1)$$

اسکو ثابت کر نیکی لئے ہم سب کی اور سب کو باہم ضرب دیتے ہیں جہاں

سفی = عم + عم + عم + عم + ... + عم + عم

$$س_ن = ع_1 + ع_2 + \dots + ع_n$$

جس سے

سین س = عم + ف + ق + ..... + عم + ف + ق + عم + ف + ق + ف

یا سب سق = سق + ق = عم عم ق

جو دوہرے تفاعل  $\text{ح} \text{ع} \text{ع} \text{م}$  کو واحد تفاعلوں  $\text{س} \text{س} \text{ق}$ ،  $\text{س} \text{س} \text{ق}$ ،  $\text{س} \text{س} \text{ق}$  کی رقوم میں مندرجہ بالا شکل میں بیان کرتا ہے۔  
اب ہم تہرے تفاعل کے لئے اسی طرح کا جملہ ثابت کرتے ہیں یعنی

عم عم عم = سس س - سس + سس - سس + سس - سس + سس

ۛ عم ق اور سر کو باہم ضرب دینے سے جہاں

$$2 \text{ ف عم } = \text{ ف عم } + \text{ ق عم } + \text{ ق عم } + \text{ ف عم } + \dots$$

$$s = e_1 + e_2 + \dots + e_n$$

ہیں تین مختلف حصوں پر مشتمل ایک جملہ ملتا ہے یعنی شکل 3:  $f + q + c$ ،

۳ عم + عم ف ، اور ۲ عم ق عم کی رقمیں۔

س ر ق = ف + ر ق + ق + ر ف + ف ق ر

جو ایسا ضابطہ ہے جو دہرے اور تہرے متشاکل تقاعلوں کو ملاتا ہے۔  
لیکن (۱) کی رو سے

۳۰ ف + ر = ق = س + ر = س + ق + ر

$$3 \text{ عم}^{\text{ق}+1} \text{ عم}^{\text{ف}} = \text{سق} + \text{ر سق} - \text{سق} + \text{ق} + \text{ر سق}$$

$$3 \text{ عم } 1 \text{ عم } 2 \text{ عم } 3 = 3 \text{ عم } 1 \text{ عم } 2 \text{ عم } 3$$

ان قیمتوں کو درج کرنے سے تہر اتفاعل ۛ عم عم عم ملسلہ سم سم سم سم سم  
کے واحد تفا علوں کی رقوم میں مندرجہ بالا طریقہ پر بیان ہو سکتا ہے۔

اسی طرح جوہرے متفاعل ۛ عم عم عم عم کو تہرے متفاعل ۛ عم عم عم عم

(169)

پر منحصر کیا جاسکتا ہے اور بالآخر س، س، س، وغیرہ پر اور علیٰ ہذا القیاس۔  
یعنی آخر لامر اصولوں کا ہر منطبق متشاکل تفاعل سروں کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے  
کیونکہ مسئلہ اسے س، س، س، س، وغیرہ سروں کی رقوم میں بیان ہو سکتے ہیں  
جب قوت نماؤں میں سے چند قوت نامساوی ہو جائیں تو ضابطوں  
(۱) اور (۲) میں ترمیم کرنی ہوگی۔

مثلاً اگر  $F = C \text{ تو } C = E \text{ تو } E = F$  اور (۱) کی قسمیں دو دو

کر کے مساوی ہوتی ہیں اس لئے  $C = E = F$  جس سے

$$C = E = F = \frac{1}{2} (S_1 - S_2)$$

اسی طرح اگر  $C = E = F$  میں  $F = C = R$  تو وہ چھ رقومیں مساوی

ہوتی ہیں جو  $C = E = F$  میں اصولوں کے تبادلہ سے حاصل ہوتی ہیں پس

$$C = E = F = \frac{1}{3 \times 2} (S_1 - S_2 - S_3 + S_4 + S_5 + S_6)$$

عام صورت میں اگر ت قوت نامساوی ہو جائیں تو ہر رقم  $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times$   
ت مرتبہ تکرار پاتی ہے۔

## مثالیں

۱۔ ثابت کرو

$$C = E = F = S_1 - S_2 - S_3 + S_4 + S_5 + S_6$$

$$2 + S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 - S_7 - S_8 - S_9 - S_{10} - S_{11} - S_{12}$$







172)

تقسیم تکمیل کرنے سے اور اس مساوات کی طرفین میں صرف باقیوں کو  
برقرار رکھنے سے

$$\frac{م_1 - لا_1 + م_2 - لا_2 + \dots + م_n - لا_n}{ف(لا)} = \frac{ف(ع_1) + ف(ع_2) + \dots + ف(ع_n)}{لا - ع_1 + لا - ع_2 + \dots + لا - ع_n}$$

جس سے

م\_1 - لا\_1 + م\_2 - لا\_2 + \dots + م\_n - لا\_n = ف(ع\_1) + ف(ع\_2) + \dots + ف(ع\_n) \cdot (لا - ع\_1)

اور اس مساوات کی طرفین میں لا\_1 کے سروں کا مقابلہ کرنے سے

$$م_1 = ف(ع_1)$$

۲۔ ثابت کرو کہ سی، اُس خارج قسمت میں  $\frac{1}{لا}$  کا سر ہے جو ف(لا) کو  
ف(لا) سے تقسیم کرنے سے اور لا کی منفی قوتوں کی بموجب ترتیب دینے سے  
حاصل ہوتا ہے۔

۳۔ ثابت کرو کہ سی، اُسی خارج قسمت میں لا\_1 کا سر (بہ تبدیل علامت)  
ہے جب اُسکو لا کی مثبت قوتوں کی بموجب ترتیب دیا جاتا ہے۔

۴۔ اگر ف(لا) کا درجہ n - ۲ سے تجاوز نہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{ف(لا)} = \frac{ف(ع_1)}{ف(ع_2)}$$

جہاں  $\frac{1}{ف(لا)}$  سے وہ مجموعہ تعبیر ہوتا ہے جو لا کو ا سے n تک (بشمول ہر دو اعداد)  
تمام قیمتیں دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{ف(لا)}{ف(لا)} = \frac{1}{لا - ع_1} + \frac{1}{لا - ع_2} + \dots + \frac{1}{لا - ع_n}$$



اور ف (لا) سے ضرب چلی پائی دینے اور یکے بعد دیگرے لا = عم، عم... رکھنے  
 ف (لا) = ف (عم) ۱ / ف (عم) ۲ + ... + ف (عم) ۱ / ف (عم) ۱  
 ف (لا) = ف (عم) ۱ / ف (عم) ۱ + ... + ف (عم) ۱ / ف (عم) ۱  
 جس سے

$$\frac{ف (لا)}{ف (لا)} = \frac{ف (عم) ۱}{ف (عم) ۱} + \frac{ف (عم) ۲}{ف (عم) ۲} + \dots + \frac{ف (عم) ۱}{ف (عم) ۱}$$

جب ف (لا) کا درجہ ن - ۲ ہو تو مساوات کی دائیں جانب کو ۱ کے  
 تفاعل کے طور پر بیان کرنے سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ کوئی رقم ایسی نہیں ہے جس میں  
 ۱ جزو ضربی کے طور پر نہ آتا ہو۔ اس لئے سرور کے مقابلہ کرنے سے

$$\frac{ف (لا)}{ف (لا)} = \frac{ف (عم) ۱}{ف (عم) ۱} = ۰$$

چونکہ ف (لا) کوئی منطوق صحیح تفاعل ہو سکتا ہے جس کا درجہ ن - ۲ سے  
 متجاوز نہ کرے اس لئے ہمیں ذیل کی مخصوص صورتیں ملتی ہیں جو خاص ترتیب کے  
 قابل ہیں:-

$$\frac{ف (لا)}{ف (لا)} = \frac{ف (عم) ۱}{ف (عم) ۱} = \frac{ف (عم) ۲}{ف (عم) ۲} = \dots = \frac{ف (عم) ۱}{ف (عم) ۱}$$

۵۔ اگر ن متغیروں لا، لا، لا، ...، لا کے درمیان ذیل کی ن - ۲ مساواتیں

$$\frac{ف (لا)}{ف (لا)} = \frac{ف (عم) ۱}{ف (عم) ۱} = \frac{ف (عم) ۲}{ف (عم) ۲} = \dots = \frac{ف (عم) ۱}{ف (عم) ۱}$$

دیکھائیں تو ان ن متغیروں کو دو نئے متغیروں لا، لا کی رقوم میں بیان کرو۔

$$\frac{ف (لا)}{ف (لا)} = \frac{ف (عم) ۱}{ف (عم) ۱} = \frac{ف (عم) ۲}{ف (عم) ۲} = \dots = \frac{ف (عم) ۱}{ف (عم) ۱}$$

۸۱۔ متشاکل تفاعلوں کا رتبہ اور وزن۔ اصولوں کے متشاکل  
 تفاعل کی کسی رقم میں سب اصولوں کی قوتوں کے مجموعہ کو ہم اس تفاعل کا

وزن کینگی (دیکھو دفعہ ۲۸) اور وہ بڑی سے بڑی قوت جسمیں ہر اصل تفاعل کے اندر داخل ہوتی ہے تفاعل کا رتبہ کہلائیگی۔ مثلاً  $3 \times 2 \times 1$  کا وزن چیم اور اس کا رتبہ تین ہے۔ یہ ثابت کر دیا گیا ہے (دفعہ ۲۸) کہ اصلو کسی متشاکل تفاعل کی قیمت میں (جو سروں کی رقوم میں بیان کی گئی ہو) ہر رقم کے لاقول کا مجموعہ تفاعل کے وزن کے مساوی ہوتا ہے۔ اب ہم متشاکل تفاعلوں سے متعلق دوسرا مسئلہ ثابت کرتے ہیں یعنی:-

کسی متشاکل تفاعل کی قیمت سروں  $2 \times 1$ ،  $3 \times 2 \times 1$ ،  $4 \times 3 \times 2 \times 1$  کی رقوم میں معلوم کیجئے تو اس جملہ کا درجہ متشاکل تفاعل کے رتبہ کے مساوی ہوتا ہے اس کو دفعہ ۲۳ کی ساداتوں سے آسانی کے ساتھ اخذ کیا جاسکتا ہے کیونکہ اصلوں کی رقوم میں ہر ایک سر کی قیمت میں کوئی اصل صرف پہلی قوت میں شامل ہوتی ہے اور اس لئے سروں میں بڑے سے بڑا درجہ وہی ہوگا جو کسی ایک اصل کے متناظر متشاکل تفاعل کا ہے۔ مثلاً  $3 \times 2 \times 1$  کی قیمت  $2 \times 1$ ،  $3 \times 2 \times 1$ ،  $4 \times 3 \times 2 \times 1$  ہے۔ سروں کے اس تفاعل کا

درجہ دو ہے اور یہ وہی ہے جو متشاکل تفاعل کا رتبہ ہے۔ چونکہ مندرجہ بالا مسئلہ اہم ہے اس لئے ہم اس کا ایک دوسرا ثبوت بھی دیتے ہیں جس میں کسی مناسب قوت سے متشاکل تفاعل کو ضرب دینے سے اسکو سروں  $1 \times 1$ ،  $2 \times 1$ ،  $3 \times 2 \times 1$ ،  $4 \times 3 \times 2 \times 1$  کے ایک تجانس صحیح تفاعل کے طور پر بیان کیا جاسکتا ہے چنانچہ تفاعل آئیو الے اطلاقات میں عموماً اسی شکل میں نظر آئیگا۔

سروں

$2 \times 1$ ،  $3 \times 2 \times 1$ ،  $4 \times 3 \times 2 \times 1$ ،  $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

کی جگہ  $\frac{1}{1}$ ،  $\frac{1}{2}$ ،  $\frac{1}{6}$ ،  $\frac{1}{24}$ ، ..... رکھو۔

اب اگر فہ (عم، عم، .....، عن) سے اصولوں کا کوئی منطبق صحیح متشاکل تفاعل تعبیر ہو تو

$$فہ (عم، عم، .....، عن) = ف (ف، ف، .....، ف)$$

جہاں تفاعل ف (ف، ف، .....، ف) کا درجہ سروں میں ۵ ہے اور یہ تفاعل سروں کا ایک متجانب صحیح تفاعل ہے جو ۱ سے تقسیم نہیں ہوتا۔ ہمیں ثابت یہ کرنا ہے کہ فہ کا درجہ ۵ ہے۔ اس مقصد کے لئے

اصولوں کو ان کے شکافیوں میں بدل دو اور اسلئے ۱، ۱، ۱، .....، ۱ کو ۱، ۱، ۱، .....، ۱ میں

۱ میں - پس

$$فہ (عم، عم، .....، عن) = ف (ف، ف، .....، ف)$$

نیز

$$فہ (عم، عم، .....، عن) = \frac{سا (عم، عم، .....، عن)}{(عم، عم، .....، عن)}$$

جہاں فہ کا درجہ پ ہے اور سا ایک صحیح تفاعل ہے جو تمام اصولوں کے حاصل ضرب سے تقسیم نہیں ہوتا اور (عم، عم، .....، عن) تمام رقموں کے نسب نماؤں کا کم سے کم مشترک جزو ضربی ہے۔ (۱) میں درج کرنے سے

$$سا (عم، عم، .....، عن) = ف (ف، ف، .....، ف)$$

اس مساوات سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ پ، ہ کے مساوی ہے کیونکہ

اگر پ، ہ سے بڑا ہوتا تو سا (عم، عم، .....، عن) حاصل ضرب عم، عم، .....، عن





متناظر متشاکل تفاعل اصولوں  $عم^۱ + عم^۲ + ...$  'عن میں سے ہر ایک کو صفر کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

## مثالیں

۱۔ مساوات

$$لا + ب لا - ۱ + ب لا - ۲ + ... + ب لا - ۱ + لا + ب = ۰$$

کی اصولوں کے متشاکل تفاعل  $عم^۱ + عم^۲ + ...$  کو محسوب کرو۔  
مساواتوں

$$\begin{aligned} ۳ عم^۱ &= - ب \\ ۳ عم^۲ &= - ب \end{aligned}$$

کو باہم ضرب دو۔

حاصل ضرب میں رقم  $عم^۱ + عم^۲$  صرف ایک مرتبہ واقع ہوتی ہے اور رقم  $عم^۱ + عم^۲ + عم^۳ + عم^۴$  چار مرتبہ کیونکہ  $عم^۱$  کو  $عم^۱ + عم^۲ + عم^۳ + عم^۴$  سے،  $عم^۲$  کو  $عم^۱ + عم^۲ + عم^۳ + عم^۴$  سے، اور  $عم^۳$  کو  $عم^۱ + عم^۲ + عم^۳ + عم^۴$  سے ضرب دینا ہوگا۔

$$پس \quad ۳ عم^۱ + عم^۲ = ۳ عم^۱ + عم^۲ = ب + ب$$

اس لئے  $۳ عم^۱ + عم^۲ = ب + ب = ۲ ب$  (مثال ۶ دفعہ ۲ کے ساتھ مقابلہ کرو)

اگر دفعہ ۸ کے طریقہ سے حساب لگایا جاتا تو

$$۳ عم^۱ + عم^۲ = ۱ س - ۱ س - ۱ س - ۱ س + ۱ س + ۱ س$$

اور اس میں دفعہ ۷ کی قیمتیں درج کرنے سے وہی اوپر کا نتیجہ حاصل ہوتا۔

لیکن اس صورت میں ظاہر ہے کہ پہلا طریقہ بہت زیادہ آسان ہے کیونکہ اس میں  
وغیرہ کی قیمتوں سے بہت سی ایسی رقمیں داخل ہوتی ہیں جو ایک دوسرے کو  
زائل کرتی ہیں۔

۲۔  $3 \text{ عم}^۲ \text{ عم}^۲$  کو عام مساوات کے لئے محسوب کرو۔

یہاں  $3 \text{ عم}^۲ \text{ عم}^۲$  کا مربع لینے سے

$$3 \text{ عم}^۲ \text{ عم}^۲ + 2 \text{ عم}^۲ \text{ عم}^۲ + 3 \text{ عم}^۲ \text{ عم}^۲ = 3 \text{ عم}^۲ \text{ عم}^۲$$

مربع لینے میں یہ ظاہر ہے کہ رقم  $3 \text{ عم}^۲ \text{ عم}^۲$ ،  $3 \text{ عم}^۲ \text{ عم}^۲$ ،  $3 \text{ عم}^۲ \text{ عم}^۲$  کو  $3 \text{ عم}^۲ \text{ عم}^۲$  سے  
یا  $3 \text{ عم}^۲ \text{ عم}^۲$  کو  $3 \text{ عم}^۲ \text{ عم}^۲$  سے یا  $3 \text{ عم}^۲ \text{ عم}^۲$  کو  $3 \text{ عم}^۲ \text{ عم}^۲$  سے ضرب دینے سے پیدا ہوں گی  
پس نتیجہ میں  $3 \text{ عم}^۲ \text{ عم}^۲$ ،  $3 \text{ عم}^۲ \text{ عم}^۲$ ،  $3 \text{ عم}^۲ \text{ عم}^۲$  کا سرچھ ہو گا کیونکہ مربع میں ہر حاصل ضرب دو مرتبہ  
واقع ہوتا ہے۔ اس مثال اور مثال ۸ دفعہ ۲ میں صرف یہ فرق ہے کہ رقم  
 $3 \text{ عم}^۲ \text{ عم}^۲$  کے قبل ۳ ہے۔ اس لئے بالآخر

$$3 \text{ عم}^۲ \text{ عم}^۲ = 3 \text{ عم}^۲ \text{ عم}^۲ - 2 \text{ عم}^۲ \text{ عم}^۲ + 2 \text{ عم}^۲ \text{ عم}^۲$$

۳۔  $3 \text{ عم}^۲ \text{ عم}^۲$  کو عام مساوات کے لئے محسوب کرو۔

مثال ۹ دفعہ ۲ کی طرح یہاں

(17)

$$3 \text{ عم}^۲ \text{ عم}^۲ + 3 \text{ عم}^۲ \text{ عم}^۲ = 3 \text{ عم}^۲ \text{ عم}^۲ + 3 \text{ عم}^۲ \text{ عم}^۲$$

اس لئے گذشتہ نتیجوں کو استعمال کرنے سے

$$3 \text{ عم}^۲ \text{ عم}^۲ = 3 \text{ عم}^۲ \text{ عم}^۲ - 2 \text{ عم}^۲ \text{ عم}^۲ - 2 \text{ عم}^۲ \text{ عم}^۲ + 2 \text{ عم}^۲ \text{ عم}^۲$$

۴۔  $3 \text{ عم}^۲ \text{ عم}^۲$  کو عام مساوات کے لئے محسوب کرو۔

نتیجہ وہی ہو گا جو پانچویں درجہ کی مساوات کے لئے حساب لگانے میں ہوتا۔









لا کا سر ہے :-

(۱+عم<sup>۱</sup> لا<sup>۱</sup> + عم<sup>۲</sup> لا<sup>۲</sup> + ....) (۱+عم<sup>۱</sup> لا<sup>۱</sup> + عم<sup>۲</sup> لا<sup>۲</sup> + ....) ... (۱+عم<sup>۱</sup> لا<sup>۱</sup> + عم<sup>۲</sup> لا<sup>۲</sup> + ....)  
 ذیل میں جو مثالیں دی گئی ہیں انہیں نہایت اہم بنیادی مسئلے شامل  
 ہیں جو تینائس حاصل ضربوں کے مجموعوں اور اس مساوات کے سروں میں  
 تعلق ظاہر کرتے ہیں جس کی اصلیں عم<sup>۱</sup>، عم<sup>۲</sup>، عم<sup>۳</sup>، ....، عن ہیں۔

## مثالیں

۱۔ ثابت کرو

$$\pi = \frac{1 - \text{عن} + 1}{\text{ف}(\text{عم})}$$

چونکہ

$$\frac{1}{\text{لا}} = \frac{1}{\text{ف}(\text{لا})} = \frac{1}{(1 - \text{عم}^1)(1 - \text{عم}^2) \dots (1 - \text{عم}^n)}$$

$$= (1 + \text{عم}^1 + \text{عم}^2 + \dots) (1 + \text{عم}^2 + \text{عم}^3 + \dots) \dots (1 + \text{عم}^n + \text{عم}^{n+1} + \dots)$$

$$= 1 + \pi^1 + \pi^2 + \dots + \pi^n + \dots + \pi^{n+1} + \dots = (1) \dots$$

$$\text{اور } \frac{1}{\text{ف}(\text{لا})} = \frac{1 - \text{عن} + 1}{\text{ف}(\text{عم})} \times \frac{1}{\text{لا} - \text{عم}}$$

(۱۷۹)

$$\text{اسلئے } \frac{1}{\text{ف}(\text{لا})} = \frac{1}{\text{ف}(\text{عم})} \times \frac{1 - \text{عن} + 1}{\text{لا} - \text{عم}} = \frac{1 - \text{عن} + 1}{\text{ف}(\text{عم})} \times \frac{1}{\text{لا} - \text{عم}} \dots (۲)$$

(۱) اور (۲) میں ۱ کے سروں کا مقابلہ کرو تو مطلوبہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے۔

۲۔ اصولوں کے تینائس حاصل ضربوں کے مجموعوں کو مساوات کے سروں کی  
 رقوم میں بیان کرو اور بالکس۔

چونکہ

(۱-عم<sub>۱</sub> ما) (۱-عم<sub>۲</sub> ما) ... (۱-عم<sub>ن</sub> ما) = ۱ + ب<sub>۱</sub> ما + ب<sub>۲</sub> ما + ... + ب<sub>ن</sub> ما  
اسلئے مثال ماسبق سے

(۱ + ب<sub>۱</sub> ما + ب<sub>۲</sub> ما + ... + ب<sub>ن</sub> ما) (۱ + ب<sub>۱</sub> ما + ب<sub>۲</sub> ما + ... + ب<sub>ن</sub> ما) = ۱  
جس سے

ب<sub>۱</sub> + ب<sub>۲</sub> + ... + ب<sub>ن</sub> = ۰، ب<sub>۱</sub> + ب<sub>۲</sub> + ... + ب<sub>ن</sub> = ۰، ب<sub>۱</sub> + ب<sub>۲</sub> + ... + ب<sub>ن</sub> = ۰

.....  
ان مساداتوں سے (جنہیں ب<sub>۱</sub>، ب<sub>۲</sub>، وغیرہ اور ب<sub>۱</sub>، ب<sub>۲</sub>، وغیرہ کا  
ایسے تبادله ہو سکتا ہے) ب<sub>۱</sub>، ب<sub>۲</sub>، ب<sub>۳</sub>، ... ب<sub>ن</sub> کو ب<sub>۱</sub>، ب<sub>۲</sub>، ب<sub>۳</sub>، ... ب<sub>ن</sub> کی رقوم  
میں بیان کیا جاسکتا ہے اور بالکس -  
اس مثال اور مثال ماسبق کے ذریعہ حسب ذیل متشاکل تفاعلوں کی  
قیمتیں سروں کی رقوم میں معلوم کیا جاسکتی ہیں :-

$\frac{1 - \text{عم}_1}{\text{ف}(\text{عم}_1)}$ ،  $\frac{1 - \text{عم}_2}{\text{ف}(\text{عم}_2)}$ ،  $\frac{1 - \text{عم}_n}{\text{ف}(\text{عم}_n)}$ ، وغیرہ

۳- ب<sub>۱</sub> کو اصلوں کی قوتوں کے مجموعوں کے ذریعہ بیان کرو -

حاصل ضرب (۱-عم<sub>۱</sub> ما) (۱-عم<sub>۲</sub> ما) ... (۱-عم<sub>ن</sub> ما) کو  $\frac{1}{\text{ع}}$  سے تقسیم کرنے کو

اور تفرق کرنے سے

$\frac{1}{\text{ع}} = \frac{\text{فرع}}{\text{فرما}} = \frac{\text{ع}}{1 - \text{عم}_1} = \text{س}_1 + \text{س}_2 + \text{س}_3 + \text{س}_4 + \dots$

$1 = 6 + \text{س}_1 + \text{س}_2 + \text{س}_3 + \text{س}_4 + \dots$

نیز  
اس لئے

(۱ + ب<sub>۱</sub> ما + ب<sub>۲</sub> ما + ... + ب<sub>ن</sub> ما) (س<sub>۱</sub> + س<sub>۲</sub> + س<sub>۳</sub> + ... + س<sub>ن</sub>) = (۱ + ب<sub>۱</sub> ما + ب<sub>۲</sub> ما + ... + ب<sub>ن</sub> ما) (س<sub>۱</sub> + س<sub>۲</sub> + س<sub>۳</sub> + ... + س<sub>ن</sub>)



(180)

# نواں باب

## مساداتوں کی اصولوں کی انتہائیں

۸۴۔ انتہاؤں کی تعریف۔ عددی مساداتوں کی حقیقی اصولوں کو

دریافت کرنے کی کوشش میں سب سے پہلے اُن حدود کی قریب ترین قیمتیں معلوم کرنا مفید ہے جسکے اندر یہ اصلیں واقع ہوتی ہیں۔ ہم یہاں وہ تحقیقات شروع کرتے ہیں جن کا حوالہ دفعہ ۴ کے آخر میں دیا گیا تھا اور چند مسئلے ثابت کرتے ہیں جن کا تعلق مساداتوں کی حقیقی اصولوں کی انتہاؤں سے ہے۔

مثبت اصولوں کی علوی انتہا وہ مثبت عدد ہے جو ان اصولوں سے سب سے بڑی اصل سے بڑا ہو اور منفی اصولوں کی سفلی انتہا وہ منفی عدد ہے جو سب سے چھوٹی اصل سے چھوٹا ہو منفی اصولوں کی علوی انتہا وہ منفی عدد ہے جو انہیں سے سب سے بڑی اصل سے بڑا ہو اور انہی سفلی انتہا وہ منفی عدد ہے جو انہیں سے سب سے چھوٹی اصل سے چھوٹا ہو، یہاں سب سے بڑے منفی عدد سے مراد وہ عدد ہے جو۔۔۔ سے قریب ترین ہے۔

جب ہم وہ انتہائیں کو نوکر لیتے ہیں جنکے اندر مسادات کی تمام حقیقی اصلیں واقع ہوتی ہیں تو مسادات کو حل کر نہیں دوں سرکام یہ ہو گا کہ وہ وقفے دریافت کئے جائیں جنہیں مختلف اصلیں واقع ہوتی ہیں۔ اس موخر الذکر مقصد کے لئے جو خاص طریقے رائج ہیں اُن کا ذکر آئندہ باب میں

کیا بنائیں گے۔

ذیل کے تمام مسئلے مثبت اصلوں کی علوی انتہاؤں سے متعلق ہیں اور آگے چلکر یہ ثابت کیا جائیگا کہ سفلی انتہاؤں اور منفی اصلوں کی تعین انسانی کے ساتھ ان مسئلوں سے ہو سکتی ہے۔

۸۵۔ مسئلہ ۱۔ کسی مساوات

$$لا + ب_۱ لا + ب_۲ لا + ..... + ب_n لا + ب_{n+۱} =$$

میں اگر پہلی منفی رقم۔ بر لا<sup>۱-۱</sup> ہو اور اگر بڑے سے بڑا منفی سر

۔ بر ہو تو مثبت اصلوں کی ایک علوی انتہا بر<sup>۱-۱</sup> ہوگی

(181)

لا کی کوئی قیمت جو

$$لا < بر (لا^{۱-۱} + لا^{۲-۱} + ..... + لا^{n-۱} + ۱) < بر \frac{لا^{n+۱}-۱}{لا-۱}$$

بناوے بدرجہ اولیٰ ف (لا) کو مثبت بنائیں گی۔  
اب لا کو ایک سے بڑا لینے سے یہ نامساوات ذیل کے رشتے سے پوری ہوتی ہے:-

$$لا < بر \frac{لا^{n+۱}-۱}{لا-۱}$$

$$یعنی لا^{n+۱} - لا^n < بر لا^{n+۱}$$

$$یعنی لا^{n+۱} (۱ - لا^{-۱}) < بر لا^{n+۱}$$

اور پھر یہ نامساوات ذیل کے رشتے سے پوری ہوتی ہے:-

$$(1-a)^2 = (1-a) \cdot (1-a) = 1 - 2a + a^2$$

کیونکہ صریحاً  
اس لئے بالآخر

$$(1-\alpha)' = \alpha < \beta$$

معنی

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

۱۶۔ مسئلہ ۲۔ اگر کسی مساوات میں ہر فی سر کو مثبت لیا جائے اور اس کو اس کے قبل کے تمام مثبت سرور کے مجموعہ سے تقسیم کیا جائے تو وہ بڑے سے بڑا خارج قسمت جو اس طرح حاصل ہواستیں ایک جمع کرنے کے بعد مثبت اصولوں کی ایک علوی انتہا ہوگا۔

فرض کرو کہ مساوات ہے

$$= 1 + \dots + \frac{1-\omega}{\omega} 1 - \dots + \frac{1-\omega}{\omega} 1 - \frac{1-\omega}{\omega} 1 + \frac{1-\omega}{\omega} 1 + \frac{\omega}{\omega} 1$$

جس میں ہم وضاحت کی خاطر جو تھے سر کو منفی سمجھتے ہیں اور عام صورت میں ایک منفی سر۔ اور پر بھی غور کرتے ہیں۔  
فرض کرو کہ اس مساوات کی ہر مثبت رقم کو ضابطہ

$$1 + (1 + u + \dots + u^{r-1} + u^{r-1}u)(1-u) = u^r$$

کے ذریعہ تحویل کیا گیا ہے جہاں یہ ضابطہ

$$1 + y + \dots + \frac{1-r}{y} + \frac{1-r}{y} = \frac{1-r}{1-y}$$





س

$$1 + \frac{1}{1 + \dots + 1 + 1 + 1 + 1} < 1 + \frac{1}{1 + 1 + 1} < 1 + \frac{1}{3} < 1 + \frac{1}{2} < 2$$

پس ایک علوی انتہا ۲ ہے۔

۲۔ مساوات

$$لا^۱ + لا^۳ + لا^۵ - لا^۷ - لا^۹ - لا^{۱۱} - لا^{۱۳} - لا^{۱۵} = ۰$$

کی مثبت اصولوں کی ایک علوی انتہا معلوم کرو۔

مسئلہ ۱ سے حاصل ہوگا  $لا^۱ + لا^۳ + لا^۵ - لا^۷ - لا^۹ - لا^{۱۱} - لا^{۱۳} - لا^{۱۵} = ۰$  اور اسلئے ایک انتہا ۵ ہے۔

مسئلہ ۲ سے حاصل ہوگا  $لا^۱ + لا^۳ + لا^۵ - لا^۷ - لا^۹ - لا^{۱۱} - لا^{۱۳} - لا^{۱۵} = ۰$  اور اسلئے ایک انتہا ۱۲ ہے۔

اس صورت میں مسئلہ ۱ سے قریب تر انتہا ملتی ہے۔

$$۳۔ لا^۱ + لا^۳ + لا^۵ - لا^۷ - لا^۹ - لا^{۱۱} - لا^{۱۳} - لا^{۱۵} = ۰$$

کی مثبت اصولوں کی ایک علوی انتہا معلوم کرو۔  
کسروں

$$\frac{۸}{۶+۵+۴+۱} \quad \frac{۶}{۵+۴+۱} \quad \frac{۹}{۵+۴+۱} \quad \frac{۳}{۴+۱}$$

میں سے پیمبری کسر سب سے بڑی ہے اور مسئلہ ۲ سے انتہا ہوگی ۳۔ مسئلہ ۱ سے انتہا ملے گی ۵۔

$$۴۔ لا^۱ + لا^۳ + لا^۵ - لا^۷ - لا^۹ - لا^{۱۱} - لا^{۱۳} - لا^{۱۵} = ۰$$

کی مثبت اصولوں کی علوی انتہا معلوم کرو۔

جواب :- دونوں طریقوں سے انتہا ملے گی ۶۔

$$۵۔ لا^۱ + لا^۳ + لا^۵ - لا^۷ - لا^۹ - لا^{۱۱} - لا^{۱۳} - لا^{۱۵} = ۰$$

کی مثبت اصولوں کی انتہا معلوم کرو۔

جواب :- مسئلہ ۱ سے ۲۰، مسئلہ ۲ سے ۳۔

عموماً صرف معائنہ سے ایسی انتہا کا معلوم کرنا ممکن ہے جو متذکرہ صدر  
سُلوں سے حاصل شدہ انتہاؤں سے قریب تر ہو۔ یہ طریقہ اس بات پر مشتمل

ہوتا ہے کہ ہر مجوزہ مساوات کی رقموں کو گروہوں میں ترتیب دیں اس طو پر کہ ہر گروہ میں ایک مثبت رقم پہلے رکھی جائے اور پھر یہ دیکھیں کہ وہ کم سے کم صحیح عدد کونسا ہے جس کو لا کی بجائے رکھنے سے ہر گروہ مثبت ہو جاتا ہے۔ کسی خاص صورت میں خود مساوات کی شکل سے ظاہر ہوگا کہ ترتیب کی صورت کیا ہونی چاہیے۔

۶۔ مثال ۲ کی مساوات کو یوں ترتیب دیا جاسکتا ہے :-

$$0 = 18 + 3\text{لا} + (51 - 3\text{لا}) + (8 - 3\text{لا})$$

$3\text{لا}$  یا اس سے کوئی بڑے عدد سے ہر گروہ مثبت ہو جاتا ہے۔ پس ایک علوی انتہا ۳ ہے۔

۷۔ مثال ۴ کی مساوات کی ترتیب یہ ہو سکتی ہے :-

$$0 = 25 - 3\text{لا} + (11 - 3\text{لا}) + 20 - 3\text{لا} + (6 - 3\text{لا}) + 7\text{لا} + 13 - 3\text{لا} = 25$$

$3\text{لا}$  یا اس سے کسی بڑے عدد سے ہر گروہ مثبت ہو جاتا ہے۔ اسلئے ایک انتہا ۳ ہے۔

۸۔ مساوات

$$0 = 18 + 2\text{لا} - 33 + 4\text{لا} - 3\text{لا}$$

کی اصولوں کی ایک علوی انتہا معلوم کرو۔  
اس کو شکل

$$0 = 18 + (1 - 3\text{لا}) + 28 - 3\text{لا} + (5 + 4\text{لا} - 3\text{لا})$$

میں رکھا جاسکتا ہے۔ اب چونکہ سہ رقمی  $4\text{لا} - 3\text{لا} + 8$  کی اصلیں خیالی ہیں یہ لا کی تمام قیمتوں کے لئے مثبت ہے (دیکھو دفعہ ۱۲)۔ پس  $1\text{لا} = 1$  علوی انتہا ہے۔ دو درجی کو اس طور پر کسی گروہ میں داخل کرنے سے اکثر صورتوں میں فائدہ ہوگا بشرطیکہ اسکی اصلیں خیالی یا مساوی ہوں۔

۹۔ مساوات  $5\text{لا} - 3\text{لا} - 10 - 23\text{لا} - 90 - 314 = 0$



ملینگ کی اور ایسی مساوات کی صورت میں جبکی سب اصلیں حقیقی ہوں اس طریقہ سے حاصل کی ہوئی انتہا جیسا کہ آگے چلکر ثابت کیا جائیگا بڑی سے بڑی اصل کے عین بعد کا صحیح عدد ہوگی۔

اس مسئلہ کو ثابت کرنے کے لئے فرض کرو کہ مساوات ف (لا) =۔ کی اصلوں کو بقدر ۵ کے گھمایا گیا ہے تو لا - ۵ = ما

$$ف (ما + ۵) = ف (۵) + ف (۵) + ف (۵) + \dots + ف (۵) + ف (۵) + \dots$$

$$ف (۵) + ف (۵) + \dots + ف (۵) + ف (۵) + \dots$$

اب اگر ۵ ایسا ہو کہ وہ تمام سروں

$$ف (۵) + ف (۵) + ف (۵) + \dots + ف (۵) + ف (۵) + \dots$$

کو مثبت بنادے تو ما کی مساوات کی کوئی اصل مثبت نہیں ہو سکتی جس کے

یہ معنی ہیں کہ لا کی مساوات کی کوئی اصل ۵ سے بڑی نہیں ہو سکتی۔ پس مثبت اصلوں کی ایک علوی انتہا ۵ ہے۔

## مثال

$$ف (لا) = لا^۳ - لا^۲ - لا - ۵ - ۱۱ - ۳$$

کسی مثال میں انتہاؤں کو معلوم کرنے کے لئے نیوٹن کا طریقہ استعمال کرنا ہو تو عام طریقہ عمل حسب ذیل ہو گا:۔ وہ چھوٹے سے چھوٹا صحیح عدد لو جو ہے ف (لا) کو مثبت بنادے اور ترتیب وار ف (لا) تک اوپر جاتے ہو دوسرے تفاعلوں میں لا کی بجائے اس عدد کو درج کرینکا اثر دریافت کرو۔ جب ایسے تفاعل پر پہنچو جو زیر بحث عدد سے منفی ہو جاتا ہے تو اسکو بقدر ایک کے متواتر بڑھاتے جاؤ یہاں تک کہ اس کے درج کرنے سے تفاعل مثبت ہو جائے

اور پھر اس نئے عدد کے ساتھ وہی عمل کرو جو اوپر مذکور ہوا اور اسکو بڑھاتے جاؤ اگر سلسلہ کا کوئی دوسرا تقابل منفی ہو جائے۔ علیٰ ہذا یہاں تک کہ ایسا عدد ملجائے جو سلسلہ کے تمام تقابلوں کو مثبت بنادے۔ مثال بالائیں تقابلوں کا سلسلہ یہ ہوگا:۔

$$ف (لا) = لا^۱ - لا^۲ - لا^۳ - لا^۴ - لا^۵ - لا^۶$$

$$ف (لا) = لا^۴ - لا^۵ - لا^۶ - لا^۷ - لا^۸ - لا^۹ - لا^{۱۰}$$

$$\frac{۱}{۲} ف (لا) = لا^۶ - لا^۷ - لا^۸ - لا^۹ - لا^{۱۰} - لا^{۱۱}$$

$$\frac{۱}{۴} ف (لا) = لا^۸ - لا^۹ - لا^{۱۰} - لا^{۱۱} - لا^{۱۲}$$

$$\frac{۱}{۲۴} ف (لا) = لا^{۱۱} - لا^{۱۲} - لا^{۱۳} - لا^{۱۴} - لا^{۱۵}$$

یہاں لا = ۱ سے ف (لا) مثبت بن جاتا ہے۔ ف (لا) میں لا = ۱ درج کرنے سے ف (لا) منفی ہو جاتا ہے۔ لا کو بقدر ایک کے بڑھاؤ تو لا = ۲ سے ف (لا) مثبت ہو جاتا ہے۔ ف (لا) میں لا = ۲ درج کرنے سے یہ منفی ہو جاتا ہے۔ لا کو بقدر ایک کے بڑھاؤ تو لا = ۳ سے ف (لا) مثبت ہو جاتا ہے۔ ف (لا) میں لا = ۳ درج کرنے سے یہ منفی ہو جاتا ہے۔ پھر لا کو بقدر ایک کے بڑھانے سے ہم دیکھتے ہیں کہ لا = ۴ سے ف (لا) مثبت ہو جاتا ہے۔ پس مطلوبہ علوی انتہا ۴ ہے۔

نیوٹن کے قاعدے کو اس طریقہ سے استعمال کرنے میں ہم نے یہ تسلیم کر لیا کہ جب کوئی عدد ایک خاص حد تک کے تمام مشتق تقابلوں کو مثبت بناتا ہے تو اس سے بڑا کوئی عدد بھی ان سب کو مثبت بناتا ہے اور اس طرح سلسلہ کے پچھلے تقابلوں پر اس عدد کے اثر کو مشاہدہ کرنے کی ضرورت نہیں۔ یہ امر مسادات

$$ف (۵+۱) = ف (۱) + ف (۵) + ف (۱۰) + \dots + \frac{۳۰}{۲ \times ۱} + \dots$$

سے ظاہر ہے (سلسلہ کے کسی تفاعل کو ف (لا) سے تعبیر کرو اور مشتق تفاعلوں کے لئے عام ترتیم استعمال کرو) جس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ اگر ف (لا) ف (لا) ف (لا) ..... سب کے سب مثبت ہوں اور ۵ بھی مثبت ہو تو ف (لا + ۵) کو مثبت ہونا چاہئے۔

یہ امر غور طلب ہے کہ نیوٹن کے طریقہ میں ایک فائدہ یہ ہے کہ اس سے اکثر وہ متصل صحیح عددوں کا علم حاصل ہوتا ہے جن کے درمیان بڑی سے بڑی اصل واقع ہوتی ہے۔ مثلاً مثال بالا میں چونکہ لا = ۳ کے لئے ف (لا) منفی اور لا = ۴ کے لئے مثبت ہے اسلئے اس مساوات کی بڑی سے بڑی اصل ۳ اور ۴ کے درمیان واقع ہوتی ہے۔

۸۹۔ سفلی انتہائیں اور منفی اصلوں کی انتہائیں۔ مثبت

اصلوں کی سفلی انتہا معلوم کرنا ہو تو مساوات کو اول لا = ۱ کے ابدال سے تحویل کرنا چاہئے۔ پھر مابین جو مساوات حاصل ہوگی اس کی مثبت اصلوں کی علوی انتہا معلوم کرو۔ اسکا متکافی یعنی  $\frac{1}{x}$  مظلوم سفلی انتہا ہوگی کہونکہ

$$x > 1 \Rightarrow \frac{1}{x} < 1 \text{ یعنی } \frac{1}{x} < 1$$

منفی اصلوں کی انتہائیں معلوم کرنے کے لئے مجوزہ مساوات کو صرف لا = -۱ کے ابدال سے تحویل کرنا ہوگا۔ یہ استحالہ منفی اصلوں کو مثبت اصلوں میں بدل دیگا۔ فرض کرو کہ مابین حاصل شدہ مساوات کی مثبت اصلوں کی علوی اور سفلی انتہائیں ۵ اور ۶ ہیں تو مجوزہ مساوات کی منفی اصلوں کی انتہائیں -۵ اور -۶ ہوں گی۔

۹۰۔ انتہائی مساواتیں۔ اگر مساوات ف (لا) = ۰ کی تمام

حقیقی اصلیں معلوم ہو سکیں تو مساوات ف (لا) = ۰ کی حقیقی اصلوں کی



تعداد معلوم کرنا ممکن ہے۔  
اس کو ثابت کرنے کے لئے فرض کرو کہ  $F(لا) =$  کی حقیقی اصلیں  
میزار کے لحاظ سے صعودی ترتیب میں 'عہ' 'بہ' 'جہ' '....' لہ ہیں اور  
فرض کرو کہ قیمتوں کا حسب ذیل سلسلہ لا کی بجائے  $F(لا)$  میں درج کیا گیا ہے  
۔ 'عہ' 'بہ' 'جہ' '....' 'لہ' +  $\infty$  مت  
جب ان مقداروں میں سے کسی دو متصل مقداروں سے مختلف العلا  
نتیجے حاصل ہوں تو ان کے درمیان  $F(لا) =$  کی ایک اصل ہوگی اور نتیجہ  
صریح دفعہ ۱ کی رو سے صرف ایک اصل ہوگی۔ لیکن جب نتیجے ہم علامت  
ہوں تو اسی نتیجہ صریح کی رو سے ان کے درمیان کوئی اصل موجود نہیں ہوگی۔  
اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ مذکورہ بالا مقداروں کو درج کرنے سے  
نتیجوں میں ہر علامت کی تبدیلی مجوزہ مساوات کی ایک حقیقی اصل  
کو مستلزم ہے۔

اگر  $F(لا) =$  کی تمام اصلیں حقیقی ہوں تو دفعہ ۱ء کے مسئلہ سے  
یہ ظاہر ہے کہ  $F(لا) =$  کی اصلیں بھی حقیقی ہیں اور یہ کہ وہ ایک ایک  
کر کے  $F(لا) =$  کی اصلوں کے ہر متصل زوج کے درمیان واقع ہوتی  
ہیں۔ اسی صورت میں اور اسی مسئلہ کی رو سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ  $F(لا) =$   
اور باقی سب مشتق تفاعلوں کی اصلیں بھی حقیقی ہیں اور ان میں سے کسی  
تفاعل کی اصلیں اس تفاعل کی اصلوں کے ہر متصل زوج کے درمیان  
واقع ہوتی ہیں جبکہ یہ مشتق ہے۔

اس قسم کی مساواتوں کو جو کسی مجوزہ مساوات کے درجہ سے بقدر  
ایک کے گھٹی ہوئی ہوں اور جنکی اصلیں مجوزہ مساوات کی اصلوں کے ہر متصل  
زوج کے درمیان واقع ہوں ہم انتہائی مساواتیں کہیں گے۔

یہ ظاہر ہے کہ نیوٹن کے طریقہ سے اصلوں کی انتہائیں معلوم کر نہیں  
جس  $F(لا) =$  کی سب اصلیں حقیقی ہوں تو دفعہ ۸۸ میں بتلائے ہوئے

طریقہ کی بموجب عمل کرنے سے تفاعل ف (لا) خود آخری تفاعل ہو گا جبکہ مثبت بنانا ہو گا اور اس لئے جس علوی انتہا پر ہم پہنچتے ہیں وہ بڑی سے بڑی اصل کے عین بعد کا صحیح عدد ہو گا۔

## مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ ف (لا) = ۰ کے کسی مشتق تفاعل فم (لا) = ۰ کی

خیالی اصلیں ف (لا) کی خیالی اصلوں سے زیادہ نہیں ہو سکتیں بلکہ حقیقی اصلیں زیادہ ہو سکتی ہیں۔

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر کسی مشتق تفاعل میں خیالی اصلوں کا مجموعہ ہونا معلوم ہو تو خیالی اصلوں کی کم از کم اتنی ہی تعداد ابتدائی مساوات میں داخل ہونی چاہئے۔

۲۔ دفعہ ۹۰ کا طریقہ استعمال کر کے وہ شرطیں معلوم کرو کہ مساوات

$$لا^۳ - ق لا + ل = ۰$$

کی تمام اصلیں حقیقی ہوں۔

۳۔ اسی طریقہ سے مساوات

$$لا^۵ - ن ق لا + (ن - ۱) ل = ۰$$

کی اصلوں کی نوعیت معلوم کرو۔

جواب: جب ن جفت ہو تو دو حقیقی اصلیں ہیں یا کوئی بھی نہیں جب اسکے کہ

$$ق^۱ < یا > ق^۱ - ۱$$

جب ن طاق ہو تو تین حقیقی اصلیں ہیں یا صرف ایک بموجب اس کے کہ

$$ق^۱ < یا > ق^۱ - ۱$$

۴۔ مساوات لا (لا - ۱) = ۰ کی سب اصلیں حقیقی ہیں۔ ن والے مشتق

تفائل معلوم کر کے ثابت کر دو کہ حسب ذیل مساوات کی سب اصلیں حقیقی اور غیر مساوی ہیں اور صفر اور ایک کے درمیان واقع ہوتی ہیں :-

$$۱ - \frac{n}{2} - \frac{n(n-1)}{2 \times 1} \times \frac{n(n-1)}{(1-n)^2} - \frac{n}{2} = 0 \text{ وغیرہ}$$

۵۔ اسی طرح (۱-۱) کا ن وال مشتق معلوم کر کے ثابت کر دو کہ ذیل کی مساوات کی سب اصلیں حقیقی اور غیر مساوی ہیں اور ۱ اور ۱ کے درمیان واقع ہوتی ہیں :-

$$۱ - \frac{n}{2} - \frac{n(n-1)}{2 \times 1} \times \frac{n(n-1)(2-n)(3-n)}{(1-n)^2(2-n)^2} - \frac{n}{2} = 0$$

۶۔ اگر مساوات ذیل میں متغیر ل' م' ن میں سے کسی دو کو صفر کے مساوی رکھا جائے تو ثابت کر دو کہ وہ دو درجی جسمیں یہ مساوات تحویل ہو جاتی ہے ایک انتہائی مساوات ہے اور ثابت کر دو کہ مجوزہ مساوات کی سب اصلیں حقیقی ہیں :-

$$(۱-۱)(۱-۱) - (۱-۱)(۱-۱) - (۱-۱)(۱-۱) - (۱-۱)(۱-۱) = 0$$

۷۔ مساوات

$$۱ - \frac{n}{2} - \frac{n}{2} - \frac{n}{2} = 0$$

کی اصلوں کی نوعیت پر پ کی مختلف قیمتوں کے لئے بحث کرو۔

دفعہ ۹۔ استعمال کرو۔ جب پ ۱ سے کم ہو تو دو اصلیں حقیقی ہیں اور دو خیالی۔ جب پ ۱ سے زیادہ ہو تو تمام اصلیں حقیقی ہیں۔ جب پ ۱ سے بڑا ہو تو تمام اصلیں خیالی ہیں۔ مساوات کی دو اصلیں مساوی ہونگی جبکہ پ ۱ سے زیادہ ہو اور مساوی اصلوں کے دو زوج ہونگے جبکہ پ ۱ سے کم ہو۔

## دسواں باب

### مساواتوں کی اصولوں کو جدا کرنا

(189)

۹۱۔ گزشتہ باب کے طریقوں سے ہم وہ حدود معلوم کر سکتے ہیں جن کے درمیان کسی عددی مساوات کی تمام حقیقی اعلیٰں واقع ہوتی ہیں۔ کسی خاص اصل کو عملاً تقریبی طور پر معلوم کرنے سے پیشتر یہ اصل جس وقفہ میں واقع ہوتی ہے اس کو ایسے وقفوں سے علیحدہ کر لینا ضروری ہے جن میں باقی دوسری اعلیٰں واقع ہوتی ہیں۔ اس باب میں چند مسئلے بیان کئے جائیں گے جن کا مقصد متغیر کی کسی دو اختیاری طور پر مفروضہ قیمتوں کے درمیان مساوات کی حقیقی اصولوں کی تعداد متعین کرنا ہے۔ یہ ظاہر ہے کہ اگر یہ مقصد پورا ہو جائے تو نہ صرف حقیقی اصولوں کی کل تعداد معلوم کرنا ممکن ہو جائیگا بلکہ ہم وہ حدود بھی معلوم کر سکیں گے جن کے درمیان اعلیٰں فرداً فرداً واقع ہوتی ہیں۔ اس مقصد کو پیش نظر رکھ کر فوریر (Fourier) اور بوڈان (Budan) نے جو مسئلے بیان کئے ہیں وہ اگرچہ طرز بیان کا لحاظ کرتے مختلف ہیں لیکن اصول میں مماثل ہیں۔ اس اصول کو سمجھانے کے لئے فوریر کا بیان زیادہ سہولت بخش ہے لیکن عملی طور پر استعمال کرنے میں بوڈان کے بیان کو ترجیح حاصل ہے۔ سٹورم (Sturm) کا مسئلہ اگرچہ عملاً زیادہ محنت طلب ہے لیکن قبل الذکر پر اس کا فائدہ یہ ہے کہ اس کو استعمال کرنے سے کسی دو مجوزہ مقداروں کے درمیان حقیقی اصولوں کی بالکل ٹھیک تعداد ہمیشہ معلوم ہو جاتی ہے حالانکہ فوریر اور

بوڈان کے مسئلہ سے صرف ایک خاص حد حاصل ہوتی ہے جسکے آگے حقیقی  
اصلوں کی تعداد مجوزہ وقفہ کے اندر تجاوز نہیں کر سکتی۔

۹۲۔ فوریر اور بوڈان کا مسئلہ۔ فرض کرو کہ دو عدد ۱ اور

ب (۱ > ب) لا کی بجائے اس سلسلہ میں درج کئے گئے ہیں  
جوف (لا) اور اس کے مشتق تفاعلوں سے بنتا ہے یعنی سلسلہ

فیل میں

ف (لا) 'فم (لا) 'فم (لا) .... ف (لا)

تو حقیقی اصلوں کی تعداد جو ۱ اور ب کے درمیان واقع ہوتی ہیں

(190)

اس اضافہ سے بڑی نہیں ہو سکتی جو سلسلہ بالا میں علامتوں کی تبدیلیوں

کی اس تعداد کو بھلا کی بجائے ۱ درج کرنے سے حاصل ہوتی ہیں تبدیلیوں کی

اس تعداد پر ہے جو لا کی بجائے ب درج کرنے سے حاصل

ہوتی ہیں۔ اور جب اس وقفہ میں حقیقی اصلوں کی تعداد اس اضافہ

سے کم پڑتی ہو تو یہ کمی بقدر ایک جفت عدد کے ہوگی۔

یہ وہ شکل ہے جس میں فوریر اس مسئلہ کو بیان کرتا ہے۔

یہاں یہ یاد رکھنا ضروری ہے کہ جب ہم دو عددوں ۱ اور ب

کا ذکر کرتے ہیں جن میں سے ۱ چھوٹا ہے تو ان میں سے ایک یا دونوں

منفی ہو سکتے ہیں اور مطلب یہ ہوتا ہے کہ ۱ بہ نسبت ب کے -∞

سے زیادہ قریب ہے۔

اب ہم ان تبدیلیوں کی جانچ کرتے ہیں جو سلسلہ بالا کے

تفاعلوں کی علامتوں کے درمیان وقوع پذیر ہو سکتی ہیں جب لا کی

(۲) وہ ف (لا) = میں ر مرتبہ تکرار پانیوالی اصل میں سے  
گزر سکتی ہے۔

(۳) وہ اداوی تقاعلوں فم (لا) = میں سے کسی ایک کی  
اصل میں سے گذر سکتی ہے اور یہ اصل فم - (لا) = یا  
فم + (لا) = میں سے کسی میں واقع نہیں ہوتی۔

(۴) وہ فم (لا) = میں مرتبہ تکرار پانیوالی اصل میں سے گذر سکتی ہے اور فم - (لا) = میں واقع نہیں ہوتی۔  
ذیل میں ہم سہولت کے منظر ف (لا) کی بجائے صرف ف  
لکھتے -

(۱) پہلی صورت میں دفعہ ۵ کی رو سے یہ ظاہر ہے کہ مساوات  
ف (لا) = کی ایک اصل میں سے گزرنے میں علامت کی  
ایک تبدیلی کم ہو جاتی ہے کیونکہ اصل میں سے گزرنے کے  
عین قبل ف اور ف کی علامتیں مختلف ہوتی ہیں اور  
گزر کے عین بعد موافق -

(۲) دوسری صورت میں ف (لا) = کی رضفی اصل میں سے گزرنے میں یہ ظاہر ہے کہ علامت کی تبدیلیاں کم ہو جاتی ہیں کیونکہ دفعہ ۶ کی رو سے گزرنے کے عین قبل تقاعلوں

ف'ف'ف'.....ف'ف'ف'

کی علاقیتیں باری باری سے + اور - یا - اور + ہوتی ہیں



ر تبدیلیاں کم ہوتی ہیں اگر ر جفت ہو،  
 ر تبدیلیاں کم ہوتی ہیں اگر ر طاق ہو۔  
 (ب) جب  $n$  ف۔ (د) اور ف۔ (د) مختلف علامت ہوں تو  
 ر تبدیلیاں کم ہوتی ہیں اگر ر جفت ہو،  
 ر تبدیلیاں کم ہوتی ہیں اگر ر طاق ہو۔  
 اس لئے بحیثیت مجموعی ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ ف۔ (لا) کی وضعی  
 اصل میں سے گزرتے وقت تبدیلیوں کی جفت تعداد کم ہو جاتی ہے۔  
 یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ (۱)، (۲) کی ایک خاص صورت ہے اور  
 (۳)، (۴) کی ایک خاص صورت یعنی جب کہ  $r = 1$ ۔ لیکن چونکہ صورتیں  
 (۱) اور (۳) اکثر وقوع پذیر ہوتی ہیں، اس لئے ان کو علیحدہ جماعت میں  
 رکھنا ہی بہتر ہے۔  
 ثبوت بالا پر نظر ثانی کرنے سے ہم یہ نتیجہ نکالیں گے کہ جب 'لا'،  
 و سے بے تک بڑھتا ہے تو علامت کی کسی تبدیلی کا اضافہ نہیں ہو سکتا  
 اور یہ کہ ف۔ (لا) = ۰ کی ہر واحد اصل میں سے گزرتے وقت  
 علامت کی ایک تبدیلی کم ہوتی ہے اور نیز یہ کہ ف۔ (لا) میں بھی علامت  
 کی تبدیلیوں کی طاق تعداد کم نہیں ہو سکتی سوائے اس صورت کے  
 جب کہ لا، ف۔ (لا) = ۰ کی ایک اصل میں سے گزرتے ہیں۔ پس و سے  
 بے تک لا کے کل تغیر میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد جو کم ہوتی ہے  
 وہ یا تو اس وقت ف۔ (لا) = ۰ کی حقیقی اصلوں کی تعداد کے مساوی  
 ہونی چاہئے یا اس سے بقدر ایک جفت عدد کے تجاوز ہونی چاہئے۔  
 اس لئے مسئلہ بالا ثابت ہو گیا۔

(192)

۹۳۔ مسئلہ کا استعمال۔ اس مسئلہ کو بوڈان نے جس شکل میں

بیان کیا ہے وہ جیسا کہ اوپر مذکور ہوا علی مقاصد کے لئے زیادہ ہولت بخش ہے۔



چنانچہ بوڈان اسکو یوں بیان کرتا ہے :- فرض کرو کہ مساوات ف (لا) = کی اصلوں کو اول بقدر ۱ کے اور بعد میں بقدر ب کے گھٹا دیا گیا ہے جہاں ۱ اور ب کوئی عدد ہیں اور ۱ ب سے چھوٹا ہے۔ تب ۱ اور ب کے درمیان حقیقی اصلوں کی تعداد اُس اضافے بڑی نہیں ہو سکتی جو پہلی استعمال شدہ مساوات میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد کو دوسری استعمال شدہ مساوات میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد پر ہے۔

فوریہ کے بیان میں یہ بات صریحاً شامل ہے کیونکہ یہ وہی استعمال شدہ مساواتیں حسب ذیل ہیں (دیکھو دفعہ ۳۳)

$$ف(۱) + ف(۱) + \dots + \frac{ف(۱)}{۲ \times ۱} + \dots + \frac{ف(۱)}{۲ \times ۱ \times ۲ \times ۱} = ۰$$

$$ف(ب) + ف(ب) + \dots + \frac{ف(ب)}{۲ \times ۱} + \dots + \frac{ف(ب)}{۲ \times ۱ \times ۲ \times ۱} = ۰$$

دفعہ مابقی کے نتیجوں کو تسلیم کرنے کے بعد ان مساواتوں سے مسئلہ بالا کی صداقت ظاہر ہے۔

اس شکل میں مسئلہ کے عملی طور پر سہولت بخش ہونے کی وجہ یہ ہے کہ ہم اصلوں کو گھٹانیکا وہ طریقہ استعمال کر سکتے ہیں جو دفعہ ۳۳ میں بتایا گیا ہے۔

## مثالیں

۱۔ مساوات

$$۱۰ - ۲ - ۳ - ۲۳ - ۳۳ - ۳۳ + ۹۵ - ۲۶ - ۳۶ - ۱۰ - ۱۰ = ۰$$

کی اصلوں کا محل وقوع معلوم کرو۔

ہم اس تفاعل کی جانچ لاکر ان قیمتوں کے لئے کرتے ہیں جو وقفوں

$$۱۰ - ۱ - ۱ - ۱ - ۱ - ۱۰$$

کے درمیان واقع ہیں۔ ان عددوں کو صرف اسوجہ سے اختیار کیا گیا ہے کہ عمل حساب میں سہولت پیدا ہو۔ اصلوں کو بقدر ایک کے گھٹانے سے استحالہ شدہ مساوات کے سروں کا حسب ذیل سلسلہ ملتا ہے

$$۲۶ - ۲۶ - ۱۵ - ۶۵ - ۴۸$$

اصلوں کو بقدر ۱۰ کے گھٹایا جائے تو عمل حساب کی ابتدا ہی میں یہ ظاہر ہو جاتا ہے کہ استحالہ شدہ مساوات کے سروں کی علامتیں سب کی سب مثبت ہوں گی اس لئے اس صورت میں عمل حساب کی تکمیل کرنے کی ضرورت نہیں۔ اصلوں کو بقدر ۱۰ اور ۱ کے گھٹانے میں سہولت اس میں ہے کہ مساوات کی متبادل علامتوں کو بدل کر اصلوں کو بقدر ۱۰ اور ۱ کے گھٹایا جائے اور پھر حاصل شدہ نتیجہ میں متبادل علامتوں کو بدلا جائے۔ جب اصلوں کو بقدر ۱ کے گھٹایا جاتا ہے تو استحالہ شدہ مساوات کے سروں حاصل ہوتے ہیں

$$۱ - ۸ - ۲ - ۱۳۹ - ۲۹۱ - ۶۰$$

اصلوں کو بقدر ۱۰ کے گھٹانے میں گزشتہ کی طرح اثنائے عمل میں ہی ہم یہ معلوم کر لیتے ہیں کہ استحالہ شدہ مساوات کی علامتیں سب کی سب مثبت ہیں یعنی جب متبادل علامتوں کو بدلا جاتا ہے تو وہ باری باری سے مثبت اور منفی ہوتی ہیں۔

اس طرح ہمیں ذیل کا نقشہ ملتا ہے:-

$$- + - + - + \quad (۱۰-)$$

$$+ - + - - + \quad (۱-)$$

$$- - + - - + \quad (۰) \quad (خود مساوات کی علامتیں)$$



(194)

## ۲۔ مسادات

$$لا^۲ + لا^۱ - لا^۰ = ۱$$

کی اصلوں کے محل وقوع معلوم کرو۔

اسکی سب اصلیں حقیقی ہیں اور ۲ اور ۲ کے درمیان واقع ہوتی ہیں (دیکھو مثال ۵ صفحہ ۱۲۶)۔ جب کبھی کسی مسادات کی تمام اصلیں حقیقی ہوں تو فوراً کے تقاطعوں کی علامتوں سے کسی دو مجوزہ صحیح عددوں کے درمیان حقیقی اصلوں کی صحیح تعداد معلوم ہو جاتی ہے۔ چنانچہ ہم نتیجہ ذیل حاصل کرتے ہیں:- اصلیں وقفوں

$$(۲-۱) (۱-۰) (۰-۱)$$

کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔

## ۳۔ مسادات

$$لا^۵ + لا^۴ - لا^۳ - لا^۲ + لا^۱ + لا^۰ = ۱$$

کا تجزیہ کرو۔

جواب :- وقفہ (۲-۱) میں دو اصلیں اور وقفوں (۱-۰) (۰-۱) میں سے ہر ایک میں ایک اصل

## ۴۔ مسادات

$$لا^۸ - لا^۷ + لا^۶ - لا^۵ + لا^۴ - لا^۳ + لا^۲ - لا^۱ + لا^۰ = ۵$$

کا تجزیہ کرو۔

اس مسادات میں منفی اصلیں نہیں ہو سکتیں۔ اصلوں کو متواتر بقدر ۱ کے گھٹاؤ یا بڑھانک کہ سروں کی علامتیں سب کی سب مثبت ہو جائیں۔ نتیجہ ذیل حاصل ہوگا:-

$$\begin{array}{l} (۰) \quad + - + - + \\ (۱۰) \quad - + + - + \\ (۲۰) \quad + + - - + \\ (۳۰) \quad + - + + + \\ (۴۰) \quad + + + + + \end{array}$$

اس طرح صفراور ۱۰ کے درمیان ایک اصل ہے، ۱۰ اور ۲۰ کے درمیان ایک اصل، ۲۰ اور ۳۰ کے درمیان کوئی اصل نہیں۔ ۳۰ اور ۴۰ کے درمیان یا تو دو حقیقی اصلیں ہیں یا خیالی اصلوں کا ایک زوج۔ تیسری استثنائہ مساوات کی اصلوں کو بقدر اکائیوں کے گھٹانے سے یہ معلوم ہو گا کہ دو حقیقی اصلیں موجود ہیں۔ اس عمل سے اصلیں علیحدہ ہو جائیں گی اور (۲، ۳) اور (۴، ۵) کے درمیان انکاد واقع ہونا معلوم ہو جائیگا۔ پس مجوزہ مساوات کی تیسری حقیقی اصل وقفہ (۲۲، ۳۳) میں واقع ہوتی ہے اور چوتھی وقفہ (۳۴، ۴۵) میں۔

۹۴۔ مسئلہ کا استعمال خیالی اصولوں پر۔ اب چونکہ

لا جب  $\infty + \infty$  تک گذرنا ہے تو علامت کی صرف تبدیلیاں کم ہو سکتی ہیں اس لئے اگر یہ یقین کر لی وجہ موجود ہو کہ کسی وقفہ میں جیسے لا کی کوئی حقیقی اصل شامل نہیں ہوتی علامت کی دو تبدیلیاں کم ہو جاتی ہیں تو ہم یہ نیزہ کے ساتھ کہہ سکتے ہیں کہ خیالی اصولوں کا ایک زوج موجود ہے۔ یوریدس استقبال کرتے وقت اس قسم کے حالات اس وقت پیدا ہوں گے جب کسی پہلے ساواں میں معدوم ہونے والے سر شامل ہوں۔ کیونکہ ہم دفعہ ۶ کے اصول کی مدد سے ایسے سر کی واجبی علامت متعین کر سکتے ہیں جو لا کی اس قیمت کے عین پیشتر اور عین بعد کی قیمتوں کے جواب میں ہو جس کے اندراج سے یہ سر معدوم ہوتا ہے۔ یہ پورا وقفہ اتنا چھوٹا لینا چاہئے کہ ف (لا) = ۰ کی کوئی اصل اس میں شامل نہ ہونے پائے۔

## مثالیں

## ۱- مساوات

ف (لا)  $\equiv \bar{\bar{L}} - \bar{L} - L^3 + L^2 = -$

کاتخیزید کرو۔

ہم اس تفاعل کا امتحان وقفوں ۰، ۱، ۲ کے درمیان کرینگے۔ اجتہاد شدہ مساواتیں ہونگی

$$\frac{1}{2} \text{ ف (۰) لا} + \frac{1}{4} \text{ ف (۰) لا} + \frac{1}{4} \text{ ف (۰) لا} + \frac{1}{4} \text{ ف (۰) لا} = ۰$$

$$\frac{1}{4} \text{ ف (۱) لا} + \frac{1}{4} \text{ ف (۱) لا} + \frac{1}{4} \text{ ف (۱) لا} + \frac{1}{4} \text{ ف (۱) لا} = ۰$$

$$\frac{1}{4} \text{ ف (۱۰) لا} + \frac{1}{4} \text{ ف (۱۰) لا} + \frac{1}{4} \text{ ف (۱۰) لا} + \frac{1}{4} \text{ ف (۱۰) لا} = ۰$$

انہیں سے پہلی مساوات خود مجوزہ مساوات ہے۔  
دفعہ گذشتہ کے طریقہ سے حساب لگایا جائے تو سر ف (۱) = ۰ اور  
ہمیں ذیل کا نقشہ ملیگا:-

$$+ - ۰ - + (۰)$$

$$+ - - ۰ + (۱)$$

$$+ + + + + (۱۰)$$

اب ہم ہر اس سطر کو جس میں صفر مشاغل ہے دو سطروں سے بدل سکتے ہیں۔ ایک اس قیمت کے جواب میں جو صفر سر پیدا کر نیوالی قیمت سے ذرا چھوٹی ہو اور دوسری اس قیمت کے جواب میں جو اس سے ذرا بڑی ہو علامتیں دفعہ ۶ میں بتلائے ہوئے طریقہ کے بموجب متعین ہونگی۔ یہ یاد رہے کہ اوپر کے نقشہ میں مشتق تقاطعوں کو تعبیر کرنے والی علامتیں دفعہ ۶ کی ترتیب کے بالعکس لکھی گئی ہیں۔ اب نقشہ بالا کی صورت وہ ہوگی جو ذیل میں درج ہے جہاں ۵ ایک بہت چھوٹی مثبت مقدار ہے:-

$$+ - + - + \left. \begin{matrix} ۵ \\ ۵ \end{matrix} \right\} (۰)$$

$$+ - - - + \left. \begin{matrix} ۵ \\ ۵ \end{matrix} \right\} (۱)$$

$$+ - - - + \left. \begin{matrix} ۵ \\ ۵ \end{matrix} \right\} (۱)$$

$$+ + + + + (۱۰)$$

جہاں - ۵ اور + ۵ کے جواب میں حاصل ہونیوالی علامتیں اس شرط کے تحت متعین ہوتی ہیں کہ وہ سر (جو صفر ہوتا ہے جبکہ لا = ۰) لا = ۵ کے لئے علامت میں اس سر سے مختلف ہونا چاہئے جو اس کے عین داہنی جانب ہے اور لا = ۵ کے لئے یہ دونوں علامتیں وہی ہونی چاہئیں۔  
۱- ۵ اور + ۵ کے جواب میں حاصل ہونیوالی علامتیں بھی اسی طرح متعین ہوتی ہیں۔

(196)

اب چونکہ وقفہ (- ۵ + ۵) میں علامتوں کی دو تبدیلیاں کم ہو جاتی ہیں اور چونکہ - ۵ اور + ۵ کے درمیان کوئی حقیقی اصل نہیں ہے اس لئے خیالی اصولوں کے ایک زوج کا وجود ثابت ہو گیا۔ + ۵ اور - ۵ کے درمیان علامتوں کی دو تبدیلیاں کم ہو جاتی ہیں اس لئے اس وقفہ میں یا تو حقیقی اصولوں کا ایک زوج شامل ہے یا خیالی اصولوں کے ایک زوج کا امکان ہے۔ غرض سے کوئی صورت صحیح ہے یہ مشتبہ ہے۔

۲- اگر متعدد سر معدوم ہوں تو ہم خیالی اصولوں کے متعدد ازواج کا وجود ثابت کر سکتے ہیں۔ یہ بات ذیل کی مثال سے ترشح ہے:-

$$۰ = ۱$$

- ۵ اور + ۵ کے جواب میں علامتیں دفعہ ۷ کے مسئلہ کی رو سے یہ ہونگی:-

$$(- ۵) \quad - \quad - \quad + \quad - \quad + \quad - \quad +$$

$$(۵ +) \quad - \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad +$$

پس چونکہ - ۵ اور + ۵ کے درمیان کوئی اصل موجود نہیں اور چونکہ صفر سے ذرا چھوٹی قیمت سے صفر سے ذرا بڑی قیمت تک جانے میں علامت کی چار تبدیلیاں کم ہوتی ہیں اس لئے ہمیں خیالی اصولوں کے دو زوجوں کے وجود کا تعین ہو جاتا ہے۔ باقی دو اصلیں اس صورت میں صریحاً حقیقی ہیں (دیکھو دفعہ ۱۲) کسی شنائی مسادات میں خیالی اصولوں کی تعداد اس طریقہ سے متعین کی جا سکتی ہے۔

### ۳۔ مساوات

$$= \sigma - 1 + \frac{1}{2} \sigma + \frac{1}{2} \sigma$$

۱۷۴۸

کی اصول کی نوعیت معلوم کرو۔

لا کی ایک چھوٹی نامفنی قیمت سے اس کی ایک چھوٹی مثبت قیمت تک  
ہمیں علامتوں کا حسب ذیل سلسلہ ملتا ہے۔

- + - + + - + - + (8-)

$$- + \cdot + \cdot \cdot \cdot + (\cdot)$$

- + + + + + + + + (0 +)

اب چونکہ یہاں علامت کی چہ تیدلیاں کم ہو جاتی ہیں اس لئے خیالی اصلیں تعداد میں جھپ ہیں۔ باقی دو اصلیں دفعہ ۲ کی رو سے حقیقی ہیں ایک مثبت اور دوسری منفی۔ منفی اصل - ۲ اور - ۱ کے درمیان واقع ہوتی ہے اور مثبت اصل صفر اور ایک کے درمیان۔

## ۴۔ مساوات

$$= 1 + U - \frac{1}{2}U^2 - \frac{1}{6}U^3$$

کا مکمل تجزیہ کرو۔

اس کی دو اصلیں خیالی ہیں۔ جب کبھی (جیسا کہ موجودہ صورت میں) اصلیں چھوٹے حدود کے اندر واقع ہوں تو بقدر ایک کے متواتر گھٹانے میں سہولت ہوگی۔ اس طریقہ سے ہم یہاں صفر اور ایک کے درمیان ایک اہل معلوم کرتے ہیں اور دوسری ۱ اور ۲ کے درمیان۔ منفی اصلوں کو معلوم کرتے وقت ہم یہ دیکھتے ہیں کہ بقدر ۱ کے گھٹانے میں خود ۱ ایک اصل ہے اور ۱ سے ذرا بڑی قیمت کے جواب میں حاصل ہونے والی علامتوں کو لکھ لیتے ہیں۔ ۱ اور صفر کے درمیان دوسری منفی اصل کا موجود ہونا معلوم ہوتا ہے۔

۵۔ مساوات ذیل کا تجزیہ کرو۔

$$= 34 - 115 - 11 + 11 + 11$$



اسکی دو اصلیں خیالی ہیں۔ ۲ اور ۳ کے درمیان ایک حقیقی اصل ہے اور وقفوں (۲-۳) اور (۱-۲) کے درمیان دو حقیقی منفی اصلیں ہیں۔

۹۵۔ فوریر اور بوڈان کے مسئلہ سے نتائج صریح:۔ خیالی (197)

اصول کے وجود کا پتہ لگانا وہ طریقہ جو دفعہ باسبق میں بیان ہوا دوسری علامت کا قاعدہ کہلاتا ہے۔ اسی طرح کا ایک قانون جو ڈی گوا سے منسوب کیا جاتا ہے فوریر کے مسئلہ کے انکشاف سے پہلے رائج تھا۔ یہ اور ڈیکارٹ کا قانون علامت فوریر کے مسئلہ کے نتائج صریح ہیں جیسا کہ ہم اب ثابت کریں گے۔

نتیجہ صریح (۱)۔ خیالی اصولوں کو معلوم کرنے کے لئے ڈی گوا

کا قاعدہ۔

اس قاعدہ کو عمولوں میں بیان کیا جاتا ہے:۔ جب کسی مساوات میں ۲ متواتر رقیں موجود نہ ہوں تو مساوات کی خیالی اصلیں تعداد میں ۲ م ہونگی۔ اور جب ۲ م + ۱ متواتر رقیں موجود نہ ہوں تو مساوات کی خیالی اصلیں تعداد میں ۲ م + ۲ یا ۲ م ہونگی بموجب اسکے کہ جن دو رقوموں کے درمیان رقوموں کی یہ کمی واقع ہوتی ہے وہ علامت میں موافق یا مختلف ہوں۔

یہ قاعدہ ثابت ہو جاتا ہے اگر ہم دفعہ ۹۲ (۴) کی طرح اس بات کی جانچ کریں کہ لا کے ایک چھوٹی منفی قیمت - سے ایک چھوٹی مثبت قیمت + تک جانے میں علامت کی کتنی تبدیلیاں کم ہوتی ہیں۔



کثیر الارقام ف (لا) اور اس کے پہلے مشتق تفاعل ف (لا) کا مقسم اعظم معمولی جبری طریقوں سے نکال کر مساوات ف (لا) = کی مساوی اصولوں کو معلوم کرنا کس طرح ممکن ہے۔ اسٹرم نے یہی طریقہ ان امدادی تفاعلوں کو بنانے میں استعمال کیا ہے جن سے کسی مساوات کی اصولوں کو جدا کر نہیں مدد لی جاتی ہے۔

فرض کرو کہ ف (لا) اور اس کے پہلے مشتق تفاعل ف (لا) کا مقسم اعظم علیہ اعظم نکالنے کا عمل پورا کر دیا گیا ہے۔ یکے بعد دیگرے آئیو الے باقی درجہ میں گھٹتے جائینگے یہاں تک کہ ہم یا تو ایسے باقی پر پہنچیں جو اپنے سے عین قبل کے باقی کو پورا پورا تقسیم کرتا ہے یا ایسے باقی پر جس میں تغیر سرے سے شامل ہی نہیں ہوتا یعنی جو عدد دی ہے۔ موخر الذکر صورت میں مساوی اصولوں کا وجود نہ ہوگا اور قبل الذکر صورت میں جیسا کہ ہم نے دیکھا ہے مساوی اصولوں کی موجودگی ظاہر ہوتی ہے۔ اسٹرم کے مسئلہ کو ان دو صورتوں میں تقسیم کر کے ان پر جدا گانہ بحث کرنا سہولت بخش ہے۔ ہم اس دفعہ میں اس صورت پر غور کریں گے جس میں مساوی اصلیں موجود نہیں ہوتیں اور دفعہ آئندہ میں مساوی اصولوں کی صورت پر۔ خود عمل کی تکمیل سے یہ بات واضح ہو جائیگی کہ کسی دی ہوئی مثال کو اس جماعت سے متعلق کرنا چاہئے۔

اسٹرم کے امدادی تفاعل وہ باقی نہیں ہیں جو عمل حساب میں خود پیش ہوتے ہیں بلکہ وہ باقی جنکی علامتیں تبدیل کر دی گئی ہوں۔

دو خطوں کا مشترک مقسم علیہ اعظم معلوم کرنے میں باقیوں کی علامتوں کو بدلنے یا نہ بدلنے سے کوئی ہرج واقع نہیں ہوتا لیکن اسٹرم کے امدادی تفاعل بنانے میں ایسی تبدیلی لازمی ہے۔ اس لئے ہم آئندہ یہ فرض کر لیں گے کہ ہر باقی کی علامت اس کے مقسم علیہ ہونے سے پیشتر بدل دی گئی ہے۔ فی الحال اس صورت کو لینے سے جس میں مساوی اصلیں موجود نہ ہوں

اسٹرم کا مسئلہ یوں بیان کیا جاسکتا ہے :-

مسئلہ :- فرض کرو کہ  $n +$  اتفاعلوں کے سلسلہ

ف (لا) ، ف (لا) ، ف (لا) ، ..... ، ف (لا) ، ف (لا)

(199)

میں لا کی بجائے کوئی دو حقیقی مقداریں  $\lambda$  اور  $\mu$  درج کی گئی

ہیں جہاں سلسلہ بالا میں دیا ہوا تفاعل ف (لا) اس کا پہلا

مشق ف (لا) اور ف (لا) اور ف (لا) کا مشترک

مقسوم علیہ اعظم نکالنے کے عمل میں یکے بعد دیگرہ آئیوں کے باقی

(بہ تبدیل علامت) شامل ہیں۔ تب سلسلہ بالا میں علامت

کی تبدیلیوں کی وہ تعداد جو لا کی بجائے  $\lambda$  درج کرنے سے

حاصل ہوتی ہے اور وہ تعداد جو لا کی بجائے  $\mu$  درج کرنے

سے حاصل ہوتی ہے ان دونوں کا فرق مساوی ف (لا) =

کی حقیقی اصولوں کی تعداد کو جو  $\lambda$  اور  $\mu$  کے درمیان واقع

ہیں ٹھیک طور پر بیان کرتا ہے۔

اسٹرم کے تفاعلوں کو بنانے کے طریقہ سے مساواتوں کا

حسب ذیل سلسلہ ملتا ہے جہیں ق ، ق ، ..... ، ق وہ

خارج قسمت ہیں جو مقسوم علیہ اعظم نکالنے کے عمل میں یکے بعد

دیگرے حاصل ہوتے ہیں :-

(۱)

ف (لا) = ق ف (لا) - ف (لا)

ف (لا) = ق ف (لا) - ف (لا)

.....

ف (لا) = ق ف (لا) - ف (لا)

.....

ف (لا) = ق ف (لا) - ف (لا)

ان مسدواتوں میں مقسوم علیہ اعظم نکالنے کے طریقہ کا نظریہ شامل ہے۔ کیونکہ پہلی مساوات سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ اگر ف (لا) اور ف (لا) میں کوئی جزو ضری مشترک ہو تو اسکو ف (لا) کا ایک جزو ضری ہونا چاہئے، اور دوسری مساوات سے اسی طرح کے استدلال سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ وہی جزو ضری ف (لا) میں بھی واقع ہونا چاہئے، ورنہ علی ہذا یہاں تک کہ ہم آخری باقی پر پہنچ جائیں جو ف (لا) اور ف (لا) میں مشترک اجزائے ضری ہونے کی صورت میں ایسا کثیر الارقام ہو گا جس میں یہ اجزائے ضری شامل ہونگے۔ اس دفعہ میں جہاں ہم نے یہ فرض کر لیا ہے کہ دے ہوئے کثیر الارقام اور اس کے پہلے مشتق تفاعل میں کوئی جزو ضری مشترک نہیں ہے آخری باقی ف (لا) عددی ہو گا۔ مسئلہ کے ثبوت کے لئے اس بات کا مشاہدہ کرنا بھی لازمی ہے کہ زیر بحث صورت میں سلسلہ کے کوئی دو متصلہ تفاعل کوئی مشترک جزو ضری نہیں رکھتے کیونکہ اگر ایسا ہوتا تو ہم اسی طرح کے استدلال سے جو اوپر استعمال ہوا مندرجہ بالا مسدواتوں کے ذریعہ یہ ثابت کر سکتے کہ اس جزو ضری کو ف (لا) اور ف (لا) میں بھی موجود ہونا چاہئے اور ایسی صورت ہمارے مفروض کے خلاف ہے۔ پس لاکھ لاکھ سے تک جانے میں سلسلہ بالا میں علامت کی جو تبدیلیاں وقوع پذیر ہوتی ہیں ان کا امتحان کرتے وقت

(200)

ام وہ صورت خارج کر سکتے ہیں جس میں دو متصلہ تفاعل متغیر کی ایک ہی قیمت کے لئے معدوم ہوتے ہیں چنانچہ وہ مختلف صورتیں جنہیں علامت کی کوئی تبدیلی واقع ہو سکتی ہے ذیل میں درج کی جاتی ہیں۔  
(۱) جب 'لا' مجوزہ مساوات ف (لا) = کی ایک اصل میں سے گزرے

(۲) جب 'لا' ایسی قیمت میں سے گزرے جو امدادی تفاعل

ف، ف، .....، ف میں سے ایک کو صفر بناتی ہے۔

(۳) جب 'لا' ایسی قیمت میں سے گزرے جو سلسلہ

ف، ف، ف، .....، ف میں سے دو یا زیادہ تفاعلوں کو

صفر بناتی ہے بشرطیکہ معدوم ہونیوالے دو تفاعل متصل نہ ہوں۔

(۱) جب 'لا' مساوات ف (لا) = کی ایک اصل میں سے گزرتا ہو تو دفعہ ۵ سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ علامت کی ایک تبدیلی کم ہو جاتی ہے کیونکہ گزرنے کے عین قبل ف (لا) اور ف (لا) مختلف علامتیں رکھتے ہیں اور گزرنے کے عین بعد موافق علامتیں۔

(۲) فرض کرو کہ لا کی قیمت ع سے مساوات ف (لا) = پوری ہوتی ہے تو مساوات

$$ف_{-1}(لا) = ق_{-1} ف_{-1}(لا) - ف_{+1}(لا)$$

$$ف_{-1}(ع) = - ف_{+1}(ع)$$

جس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ لا کی اس قیمت سے ف<sub>-1</sub>(لا) اور ف<sub>+1</sub>(لا) کی عددی قیمت ایک ہی ہوتی ہے مگر مختلف

علامتوں کے ساتھ۔ عہ سے ذرا کم قیمت سے ذرا بڑی قیمت تک گزرنے میں ہم اس وقفہ کو اتنا چھوٹا فرض کر سکتے ہیں کہ اس میں ف (لا) یا ف (لا) کی کوئی اصل شامل نہ ہو۔ اس لئے زیر بحث پورے وقفہ میں یہ دونوں تفاعل اپنی اپنی علامتوں پر قائم رہتے ہیں۔ اگر ف (لا) کی علامت نہ بدلے (اور یہ بات اس میں متفقہ صورت میں واقع ہوگی جب اصل عہ جفت مرتبہ تکرار پاتی ہو) تو دونوں کے سلسلہ میں کوئی تغیر نہ ہوگا۔ عموماً ف (لا) کی علامت بدلے گی لیکن اس سے تینوں تفاعلوں کے جٹ میں نہ تو علامت کے کسی تغیر کا اضافہ ہوگا نہ کمی کیونکہ ف (لا) اور ف (لا) میں علامتوں کا اختلاف ہونے کی وجہ سے گزرنے کے عین قبل اور عین بعد دونوں صورتوں میں علامت کا ایک تغیر اور ایک استقلال موجود ہوگا خواہ درمیانی تفاعل ف (لا) کی علامت کچھ بھی ہو۔ مثلاً اگر گزرنے کے قبل علامتیں + - - - - - ہوں تو گزرنے کے بعد یہ + + - - - - ہو جائیں گی یعنی ایک تغیر اور ایک استقلال ایک استقلال اور ایک تغیر میں بدل گئے ہیں لیکن علامت کے تغیر و کمی تعداد میں بحیثیت مجموعی کوئی کمی بیشی نہیں ہوئی۔

(201)

(۳) پچھلی صورتوں میں استقلال کی بنیاد چونکہ صرف ان روابط پر رکھی گئی ہے جو ایک تفاعل کو اس کے متصلہ تفاعلوں کے ساتھ ہوتے ہیں اور چونکہ یہ روابط موجودہ صورت میں غیر متبدل رہتے ہیں کیونکہ کوئی دو متصلہ تفاعل یا ہم معدوم نہیں ہوتے اس لئے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ اگر ف (لا) معدوم ہو تو اس کے تفاعلوں میں سے ایک تفاعل ہو تو علامت کی ایک تبدیلی کم ہو جاتی ہے اور اگر ف (لا) معدوم نہ ہو تو علامت کی کوئی تبدیلی نہ کم ہوتی ہے نہ زیادہ

پس ہم نے یہ ثابت کر دیا کہ جب 'لا' مساوات ف (لا) = کی ایک اصل میں سے گذرتا ہے تو علامت کی ایک تبدیلی کم ہو جاتی ہے اور کسی دوسرے حالات کے تحت علامت کی تبدیلی نہ کم ہوتی ہے نہ زیادہ۔ اس لئے لا کے ا سے ب تک جانے میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد 'ا' اور ب کے درمیان مساوات کی اصولوں کی تعداد کے مساوی ہوتی ہے۔

مساوی اصولوں کی صورت پر غور کرنے سے پیشتر ہم اسٹرم کے مسئلہ کو چند سادہ مثالوں سے واضح کرینگے۔ علامتوں کی اصل میں ہے کہ اسٹرم کے تقاضوں میں لا کی بجائے پہلے  $-\infty, 0, +\infty$  درج کیا جائے تاکہ منفی اور مثبت اصولوں کی کل تعداد حاصل ہو جائے۔ منفی اصولوں کو جدا کر نیکے لئے اعداد صحیح  $-1, -2, -3, \dots$  وغیرہ کو متواتر درج کرنا ہو گا۔ ہر ایک کہ ہم علامتوں کے اس سلسلہ پر پہنچ جائیں جو  $-\infty$  کے درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔ مثبت اصولوں کو جدا کر نیکے لئے ہم  $1, 2, 3, \dots$  وغیرہ کا اندراج کرتے ہیں یہاں تک کہ علامتوں کا وہ سلسلہ حاصل ہو جائے جو  $+\infty$  کے درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

طالب علم کو یہ معلوم کرنے میں اکثر وقت ہوگی کہ اسٹرم کے سلسلہ میں کم شدہ علامت کی تبدیلیوں کی تعداد کو کس طرح محفوظ کیا جاسکتا ہے کیونکہ جو نقصان واقع ہوتا ہے وہ صرف پہلے دو تقاضوں ف (لا) اور ف (لا) کے درمیان واقع ہوتا ہے۔ اس وقت کو دور کر نہیں اس بات سے مدد مل سکتی ہے کہ جب 'لا' ف (لا) = کی ایک اصل سے دوسری اصل یہ تک بڑھتا ہے تو اگرچہ علامت کی تبدیلیوں کی تعداد میں کوئی تغیر واقع نہیں ہوتا لیکن ف (لا) اور بعد کے تقاضوں میں علامتوں کی تقسیم اس طور پر بدلتی ہے کہ ف (لا) اور ف (لا) کی علامتیں جو لا کے ع میں سے گذرنیکے عین بعد ایک ہی تھیں۔ میں گذرنیکے عین قبل پھر مختلف ہو جاتی ہیں۔



## مثالیں

۱۔ مساوات

$$ف (لا) \equiv لا^۳ - لا^۲ - لا - ۵ = ۰$$

کی حقیقی اصولوں کی تعداد اور ان کا محل وقوع معلوم کرو۔

یہاں  $ف (لا) = لا^۳ - لا^۲ - لا - ۵$ ،  $ف (لا) = لا^۲ + لا - ۱۵$ ،  $ف (لا) = لا^۳ - ۶۴$

لا کی قیمتوں -  $\infty$ ،  $۰$ ،  $۱$  کے جواب میں ہم حاصل کرتے ہیں

$$- - + - (\infty -)$$

$$- + - - (۰)$$

$$- + + + (\infty +)$$

پس صرف ایک حقیقی اصل ہے اور وہ مثبت ہے۔

پھر لا کی قیمتوں ۱، ۲، ۳ کے جواب میں ہم حاصل کرتے ہیں

$$۱ - + + - (۱)$$

$$۲ - + + - (۲)$$

$$۳ - + + + (۳)$$

اس لئے حقیقی اصل ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہوتی ہے۔

۲۔ مساوات

$$لا^۳ - لا^۲ + لا - ۷ = ۰$$

کی حقیقی اصولوں کی تعداد اور ان کا محل وقوع معلوم کرو۔

ہم بہ آسانی حاصل کرتے ہیں

$$ف (لا) = لا^۳ - لا^۲ + لا - ۷$$

$$ف (لا) = لا^۲ - لا - ۳$$

$$ف (لا) = ۱$$

اور

$$+ - + - (\infty -)$$

$$+ - - + (0)$$

$$+ + + + (\infty +)$$

پس تمام اصلیں حقیقی ہیں، ایک منفی اور دو مثبت -  
نیز ہمیں ذیل کے نتیجے ملتے ہیں:-

$$+ - + - (2 -)$$

$$+ - + + (3 -)$$

$$+ - + + (2 -)$$

$$+ - - + (1 -)$$

$$+ - - + (1)$$

$$+ + + + (2)$$

یہاں - ۲ اور + ۲ سے علامتوں کے وہی سلسلے ملتے ہیں جو  
-  $\infty$  اور +  $\infty$  سے حاصل ہوتے ہیں اور اسلئے ہم انہیں ہرگز جاتے  
ہیں - منفی اصل - ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہوتی ہے اور دو مثبت  
اصلیں ۱ اور ۲ کے درمیان -

اس مثال سے فوریر کے مسئلہ پر اسٹرم کے مسئلہ کی فوقیت واضح  
ہو جاتی ہے -

فوریر کے تفاعلوں میں ۱ اور ۲ کے اندراج سے علامتوں کے  
حسب ذیل سلسلے ملینگے جنکی تصدیق آسانی کے ساتھ کیجا سکتی ہے:-

$$+ + - + (1)$$

$$+ + + + (2)$$

اب فوریر کے مسئلہ سے ہم صرف یہ نتیجہ نکلانے کا حق رکھتے ہیں کہ  
۱ اور ۲ کے درمیان دو سے زیادہ اصلیں نہیں ہو سکتیں - لیکن اسٹرم کے



صفر اور ایک کے درمیان -

۹۷۔ اسٹرم کا مسئلہ - مساوی اصلیں - فرض کرو کہ

ف (لا، اور ف (لا، کا مشترک مقسوم علیہ اعظم نکالنے کا عمل پورا کر دیا گیا ہے اور حسب سابق متواتر انبوائے باقیوں کی علامتیں بدل چکی ہیں اسٹرم کا آخری تفاضل موجودہ صورت میں عددی نہیں ہو گا کیونکہ یہاں یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ ف (لا، اور ف (لا، کا ایک مشترک جزو ضروری ایسا ہے جس میں لا شامل ہوتا ہے اور اسلئے یہی وہ آخری تفاضل ہو گا جو متذکرہ صدر عمل سے حاصل ہوتا ہے - فرض کرو کہ تفاضلوں کا سلسلہ ہے

ف (لا، ف (لا، ف (لا، ... ف (لا،

اب ف (لا) = کی ضعیفی اصل کے سوا لا جب کسی قیمت میں سے گذرتا ہے تو دفعہ ماضی کے نتائج سلسلہ بالا پر بھی صادق آتے ہیں کیونکہ کوئی قیمت سوائے ضعیفی اصل کے سلسلہ کے کسی دو متصل تفاضلوں کو معدوم نہیں کر سکتی - لیکن جب 'لا' مساوات ف (لا) = کی ایک ضعیفی اصل میں سے گذرتا ہے تو دفعہ ۵ کے نتیجہ صریح کی رو سے ف (لا، اور ف (لا، کے درمیان علامت کی ایک تبدیلی کم ہو جاتی ہے اور اب ہم یہ ثابت کریں گے کہ سلسلہ کے باقی دوسرے تفاضلوں یعنی ف (ف، ف (ف، ... ف (ف میں علامت کی کسی تبدیلی کا نہ اضافہ ہوتا ہے نہ کمی - فرض کرو کہ ف (لا، لی ایک م ضعیفی اصل عہ موجود ہے

تو دفعہ ۹۶ کی مساواتوں (۱) سے یہ ظاہر ہے کہ تفاضلوں ف (ف، ف (ف،

(204) ..... ف (ف میں - ہر ایک میں (لا - عہ) ۱ - ایک جزو ضروری ہے

فرض کرو کہ ان تفاضلوں میں بقیہ اجزائے ضربی علی الترتیب ف (ف، ف (ف،

... ف (ف ہیں - مذکورہ بالا مساواتوں (۱) کو (لا - عہ) ۱ سے تقسیم کرو تو

مسواقوں کا ایک سلسلہ ملیگا جن سے دفعہ اسبق کے استدلال کو استعمال کرنے سے یہ ثابت ہو جائیگا کہ عہ میں سے گزرنے کی وجہ سے سلسلہ فہ، فہ، .....، فہ میں علامت کی کوئی تبدیلی نہ کم ہوتی ہے نہ زیادہ۔ اس لئے سلسلہ ن، ف، ف، ....، فہ میں بھی علامت کی کوئی تبدیلی نہ کم ہوتی ہے نہ زیادہ کیونکہ لاجب قیمت ء-ء سے قیمت ع+ء تک جاتا ہے تو جزو ضروری (لا-عہ) م-ا کا یہ اثر ہو گا کہ یہ پانچ اعلیٰ فہ، فہ، فہ، فہ، فہ میں سے سب کی علامتیں بدل دیگا اگر م-ا طاق ہو، یا کسی کی نہیں (اگر م-ا جفت ہو) اور ال سب تفاعلوں کی علامتوں کے بدل جانے سے علامت کے تغیرات کی تعداد نہ کھٹ سکتی ہے نہ بڑھ سکتی ہے۔

پس ہم نے یہ ثابت کر دیا کہ لاجب ف (لا) = کی ضیفی اصل میں سے گذرتا ہے تو ف اور ف کے درمیان علامت کی ایک تبدیلی کم ہو جاتی ہے اور سلسلہ کے کسی دوسرے حصہ میں علامت کی کوئی تبدیلی نہ کم ہوتی ہے نہ زیادہ۔ البتہ یہ بات درست رہتی ہے کہ لاجب ف (لا) = کی ایک واحد اصل میں سے گذرتا ہے تو حسب سابق علامت کی ایک تبدیلی کم ہو جاتی ہے۔ اب ہم مساوی اصولوں کی صورت کے لئے اسٹرم کے مسئلہ کو یوں بیان کر سکتے ہیں :-

سلسلہ  
ف، ف، ف، ف، ف

میں جب 'ا' اور ب درج کئے جائیں تو علامت کی تبدیلیوں کی تعداد میں کے درمیان فرق 'ا' اور ب کے درمیان حقیقی اصولوں کی تعداد کے مساوی ہوتا ہے جہاں آخری متغائل قرء اور ف کا

مشترک مقسوم علیہ اعظم ہے اور ہر شعفی اصل کو صرف ایک مرتبہ شمار کیا گیا ہے۔

## مثالیں

۱۔ مساوات

$$لا^۰ - ۵ لا^۱ + ۹ لا^۲ - ۷ لا^۳ + ۲ = ۰$$

کی اصولوں کی نوعیت معلوم کرو۔

ہم آسانی کے ساتھ حاصل کرتے ہیں

$$ف (لا) = ۴ لا^۲ - ۱۵ لا^۱ + ۱۸ لا - ۷$$

$$ف (لا) = لا^۲ - ۲ لا + ۱$$

ف (لا) ' ف (لا) کو پوری طرح تقسیم کر دیتا ہے پس اس صورت میں

اسٹیم کا سلسلہ ف (لا) پر اگر رک جاتا ہے اور اس طرح مساوی اصولوں کے وجود کو ثابت کرتا ہے۔

(۳۰۵) مساوات کی حقیقی اصولوں کی تعداد معلوم کرنے کے لئے ہم تفاضلوں  
ف ' ف ' ف کے سلسلہ میں لا کی بجائے - ۷ اور + ۷ دینے کرتے  
ہیں تو حاصل ہوتا ہے

$$+ - + (- ۷)$$

$$+ + + (+ ۷)$$

پس مساوات کی صرف دو حقیقی جداگانہ اصلیں ہیں۔ انہیں سے ایک تہری  
اصل ہے جیسا کہ ف (لا) کی شکل سے ظاہر ہے جو (لا - ۱) کے مساوی ہے۔

۲۔ مساوات

$$لا^۰ - ۶ لا^۱ + ۱۳ لا^۲ - ۱۲ لا^۳ + ۴ = ۰$$

کی اصولوں کی نوعیت معلوم کرو۔

یہاں

$$ف_۱ (لا) = لا^۴ - لا^۳ + لا^۲ - لا - ۱۲$$

$$ف_۲ (لا) = لا^۳ - لا^۲ + لا + ۲$$

ف<sub>۲</sub> (لا) اسٹرم کا آخری تفاعل ہے اور اسلئے مساوات کی مساوی اصلیں موجود ہیں۔

$$+ - + (\infty -)$$

$$+ + + (\infty +)$$

صرف دو حقیقی جداگانہ اصلیں ہیں اور چونکہ ف<sub>۲</sub> (لا) ≡ (لا-۱)(لا-۲) <sup>۶</sup> اصلوں ۱ اور ۲ میں سے ہر ایک دوہری اصل ہے۔

۳۔ مساوات

$$لا^۵ + لا^۴ + لا^۳ - لا^۲ - لا - ۱ = ۰$$

کی اصلوں کی نوعیت دریافت کرو۔

یہاں

$$ف_۱ = لا^۵ + لا^۴ + لا^۳ - لا^۲ - لا - ۱$$

$$ف_۲ = لا^۴ + لا^۳ + لا^۲ + لا + ۱$$

$$ف_۳ = لا^۳ - لا^۲ - لا - ۱$$

$$ف_۴ = لا - ۱$$

$$ف_۵ = ۰$$

چونکہ ف<sub>۵</sub> = ۰، ف<sub>۱</sub> اور ف<sub>۲</sub> کا مشترک مقسوم علیہ اعظم لا + ۱ ہے اور ف<sub>۳</sub> (لا) کی ایک دوہری اصل -۱ ہے۔ نیز

$$+ - - + - (\infty -)$$

$$- - + + + (\infty +)$$

پس دو حقیقی جداگانہ اصلیں ہیں۔ اسلئے مساوات کی دوہری اصل کے سوا ایک دوسری حقیقی اصل ہے اور دو اصلیں خیالی ہیں۔

۴۔ مساوات

$$۱-۷ + ۱۵-۱۸ = ۴۸ + ۴۸ - ۱۶ =$$

کی اصلوں کی نوعیت معلوم کرو۔

یہاں

$$۴۸ + ۸۰ - ۶۰ = ۶۰ - ۳۵ + ۶۰ - ۶۰ = ۴۸ + ۸۰ - ۶۰ =$$

$$۴۸ + ۸۰ - ۶۰ = ۶۰ - ۳۵ + ۶۰ - ۶۰ = ۴۸ + ۸۰ - ۶۰ =$$

$$۴۸ + ۸۰ - ۶۰ = ۶۰ - ۳۵ + ۶۰ - ۶۰ = ۴۸ + ۸۰ - ۶۰ =$$

جواب :- تین جدا گانہ حقیقی اصلیں، ان میں سے ایک چوہری

۹۸۔ اسٹرم کے مسئلہ کا استعمال۔ اعلیٰ درجہ کی مساد انوں کی (208)

صورت میں اسٹرم کے بعد انی رفا علوں کو محسوب کرنا عمل اکثر بہت محنت طلب ہو جاتا ہے۔ اسلئے چند ایسے نکات کو پیش نظر رکھنا ضروری ہے جنکی مدد سے اس محنت میں تخفیف ہونے کا امکان ہے۔

(۱) آخری باقی محسوب کرنے میں جبکہ وہ عددی ہو چو نہ صرف اسکی علامت سے نہیں واسطہ پڑتا ہے اس لئے آخری عمل تقسیم سے ہم بچ سکتے ہیں کیونکہ لا کی وہ قیمت جو ف کو معدوم کرتی ہے ف

اور ف کو مختلف علامت بنا دیتی ہے۔ عموماً بغیر کسی عمل حساب کے یہ بتانا ممکن ہے کہ اگر ف (۱) کی اصل کو ف (۲) میں

درج کیا جائے تو حاصل کی علامت کیا ہوگی۔ چنانچہ دفعہ ۹۶ مثال ۳ میں اگر ف (۱) = ۰ کی اصل - ۳ کو ۹ لا - ۲۴ لا + ۱۱ میں لا کی بجائے

درج کیا جائے تو حاصل کی علامت صریحاً مثبت ہے پس ف (۱) کی علامت منفی ہے اور اس لئے لا کی قیمت - ۳ کے جواب میں



ف (لا) کی قیمت - ۴۳۳ کو محبوب کرنے کی ضرورت نہیں۔  
 (۲) جب کسی طرح سے یہ پہچان لینا ممکن ہو کہ اسٹرم کے  
 تفاعلوں میں سے کسی ایک کی سبب اصلیں خیالی ہیں تو کسی اور تفاعل  
 کو اس تفاعل کے آگے محسوب کرنے کی ضرورت نہیں پڑتی کیونکہ ایسا  
 تفاعل متغیر کی تمام قیمتوں کے لئے ہمیشہ ایک ہی علامت برقرار  
 رکھتا ہے (دفعہ ۱۲ نتیجہ صریح)۔ در اس لئے اسکی اور اسکے بعد آنیوالے  
 تفاعلوں کی علامت کی تبدیلیوں کی تعداد میں کبھی بھی کوئی تغیر وقوع پذیر  
 نہیں ہو سکتا چنانچہ جب دو مقادیر ۱ اور ۲ درج کیجاتی ہیں تو  
 تبدیلیوں کی تعداد میں جو فرق ہوتا ہے وہ علامت کے ان تغیرات پر  
 منحصر نہیں ہوتا جو سلسلہ کے اُس حصہ میں موجود ہو سکتی ہیں جس میں  
 زیر بحث تفاعل اور اس کے بعد آنیوالے تفاعل شامل ہیں۔ اس نتیجہ  
 کو استعمال کرنے میں ہمیشہ مناسب یہ ہے کہ جب ہم دو درجی تفاعل  
 (مثلاً ۱ + ۲ + ۳ + ۴) پر پہنچیں تو اس بات کا امتحان کر لیں کہ لا  
 والی رقم اور مطلق رقم ہم علامت ہونے کی صورت میں (اگر ایسا نہیں  
 ہے تو اصلیں خیالی نہیں ہو سکتیں) آیا شرط ۴ درج ۳ + ۴ یوری  
 ہوتی ہے یا نہیں۔ اگر یہ شرط پوری ہوتی ہو تو ہم جانتے ہیں کہ اصلیں  
 خیالی ہونگی اور عمل حساب کو آگے بڑھانے کی ضرورت نہیں۔  
 جب تفاعلوں میں سے کوئی ایک کامل مرتب ہو تو اس صورت  
 پر بھی اوپر کے نتائج کا اطلاق ہوتا ہے کیونکہ ایسا تفاعل لا کی حقیقی قیمتوں  
 کے لئے اپنی علامت نہیں بدلتا۔

## مثالیں

۱۔ سادات

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ = ۱۰$$

کا تجزیہ کرو۔

ہم معلوم کرتے ہیں

$$\text{فم (لا) } = - ۲۹ \text{ لا} - ۸۷ \text{ لا} + ۱۴$$

$$\text{فم (لا) } = - ۱۰۸۶ \text{ لا} - ۴۸۱$$

$$\text{فم (لا) } = -$$

یہاں ہم یہ دیکھتے ہیں کہ لا کی وہ قیمت جو مساوات فم (لا) = ۰ سے حاصل ہوتی ہے اور جو  $-\frac{1}{4}$  سے بہت چھوٹا فرق رکھتی ہے فم (لا) کو مثبت بناتی ہے۔ پس فم (لا) منفی ہے۔ مساوات کی دو اصلیں حقیقی ہیں اور دو خیالی حقیقی اصلیں وقفوں  $(-۲-۱)$ ،  $(-۱-۰)$  میں واقع ہوتی ہیں۔

۲۔ مساوات

$$\text{لا} - ۴ \text{ لا} - ۳ \text{ لا} + ۲۳ = ۰$$

کا تجزیہ کرو۔

ہم معلوم کرتے ہیں

$$\text{فم (لا) } = ۱۲ \text{ لا} + ۹ \text{ لا} - ۸۹$$

$$\text{فم (لا) } = - ۴۹۱ \text{ لا} + ۱۳۷۱$$

$$\text{فم (لا) } = -$$

یہاں فم (لا) = ۰ سے حاصل ہوتا ہے لا  $\frac{۱۳۷۱}{۴۹۱} < \frac{۱۳۷۱}{۵۰۰} <$

$\frac{۲۵۷۴}{۳} < \frac{۵}{۳}$  اور لا  $= \frac{۵}{۳}$ ، فم (لا) کو مثبت بناتا ہے۔ اس لئے فم (لا) کی اصل بھی اس کو مثبت بناتی ہے۔

مساوات کی دو اصلیں حقیقی ہیں اور دو خیالی حقیقی اصلیں وقفوں

$(۲، ۳)$ ،  $(۳، ۴)$  میں واقع ہوتی ہیں۔

۳۔ مساوات

$$\text{لا} - ۳ \text{ لا} - ۱۳ \text{ لا} + ۱۰ \text{ لا} - ۱۹ = ۰$$

کا تجزیہ کرو۔

یہاں

$$ف_۱ (لا) = لا^۳ - لا^۱۳ + ۵$$

$$ف_۲ (لا) = لا^۱۳ - لا^۱۵ + ۳۸$$

چونکہ  $۳۸ \times ۱۳ \times ۲ < ۲۱۵$ ،  $ف_۲ (لا)$  کی اصلیں خیالی ہیں اسلئے ہم انہیں کے یقینہ تقاطعوں کو محسوب نہیں کرتے۔

$$- \infty - ' - ' + \infty \text{ درج کرنے سے}$$

$$+ - + (\infty -)$$

$$+ + - (-)$$

$$+ + + (\infty +)$$

پس دو اصلیں حقیقی ہیں ایک مثبت اور دوسری منفی۔

۴۔ مساوات

$$ف (لا) \equiv لا^۵ + لا^۲ + لا^۲ - لا^۲ - لا^۳ - ۵ = ۰$$

کا تجزیہ کرو۔

$$ف_۱ (لا) = لا^۵ + لا^۸ + لا^۳ - لا^۸ - ۳$$

$$ف_۲ (لا) = لا^۶ + لا^۶ + لا^۲۲ + لا^۲۲ - ۱۱۹$$

$$ف_۳ (لا) = لا^۱۱۶ - لا^۵۴ - لا^۲۲۳$$

چونکہ  $۱۱۶ \times ۲۲۳ < ۲۵۴$ ، باقی تقاطعوں کو معلوم کرنیکی ضرورت نہیں۔  
 $- \infty - ' - ' + \infty$  درج کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$- - + - (\infty -)$$

$$- + - - (-)$$

$$- + + + (\infty +)$$

چار اصلیں خیالی ہیں اور ایک حقیقی مثبت اصل۔

۵۔ مساوات

$$لا^۲ - لا^۲ - لا^۱۰ + لا^۱۰ + ۱۰ = ۰$$

کی حقیقی اصلوں کی تعداد اور ایک کامل وقوع معلوم کرو۔

جواب :- سب اصلیں حقیقی ہیں دو اصلیں تفوں (۳-، ۲-)

(۱-۰) میں ۲ اور دو اصلیں (۳، ۲) کے درمیان واقع ہوتی ہیں

۶ - مساوات

$$۱۱ + ۱۱ + ۱۱ + ۱۱ + ۱۱ + ۱۱ = ۱۱ + ۱۱ + ۱۱ + ۱۱ + ۱۱ + ۱۱$$

کا تجزیہ کرو۔

یہ معلوم ہو جائیگا کہ عمل حساب دو درجہ باقی پر پہنچتے ہی ختم ہو جاسکتا ہے۔  
جواب :- صرف ایک اصل حقیقی ہے وقفہ (۲، ۱) میں۔

۷ - مساوات

$$۱۱ + ۱۱ + ۱۱ + ۱۱ + ۱۱ + ۱۱ = ۱۱ + ۱۱ + ۱۱ + ۱۱ + ۱۱ + ۱۱$$

کا تجزیہ کرو۔

$$۲۷۵۱ - ۱۱۸۵۴ = ۱۱۸۵۴ - ۲۷۵۱$$

یہاں

$$۲۷۵۱ = ۱۱۸۵۴$$

بعض مثالوں میں جیسا کہ اوپر کی مثال سے ظاہر ہے فوراً یہ کہنا آسان نہیں ہوتا کہ ایک تفاعل کی اصل سے اس کے ماقبل تفاعل کی علامت کیا ہو جائیگی۔  
ہم نے یہاں ف (۱۱) کو محسوب کیا اور وہ بہت چھوٹا عدد نکلا حالانکہ ف (۱۱) کے سروں کی مقدار سے ف (۱۱) کے لئے اس سے بڑے عدد کی توقع ہوتی تھی۔ واقعہ یہ ہے کہ اگر ہم ف (۱۱) کی اصل کو ف (۱۱) میں درج کریں تو مثبت حصہ، تقریباً منفی حصہ کے مساوی حاصل ہوتا ہے یہ ہمیشہ اس بات کی علامت ہے کہ مجوزہ مساوات کی دو اصلیں تقریباً مساوی ہیں۔ موجود

مثال میں ۳ اور ۴ کے درمیان دو مثبت اصلیں ہیں۔ اس وقفہ کو مزید وقفوں میں تقسیم کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ دونوں اصلیں پھر بھی ۳، ۴ اور ۳، ۴ کے درمیان واقع ہوتی ہیں اور اس لئے یہ دونوں یا ہم بہت قریب ہیں۔ حقیقی اور خیالی اصلوں کے درمیان جو تسلسل پایا جاتا ہے اسکی یہ دوسری تشکیل ہے (دیکھو صفحات ۱۸۶، ۱۸۷)۔ اگر ف (۱۱) صفر ہوتا تو یہ دونوں اصلیں مساوی ہوتیں اور اگر وہ چھوٹا منفی عدد ہوتا تو یہ اصلیں خیالی ہوتیں۔

۸۔ مساوات

$$۵ + لا^۲ + لا^۳ - لا^۲ + لا^۲ - لا = ۱$$

کا تجزیہ کرو۔  
عمل سے معلوم ہوتا ہے کہ دو درجہ تفاعل کی اصلیں خیالی ہیں۔  
جواب :- ایک حقیقی اصل (۱،۰) کے درمیان - چار خیالی  
اصلیں -

۹۔ مساوات

$$۶ لا - لا^۲ - لا^۳ + لا^۲ + لا^۲ - لا = ۹$$

کا تجزیہ کرو۔  
یہاں  
اور چونکہ اس کی سب اصلیں خیالی ہیں، عمل حساب یہاں پہنچ کر ختم کیا جاسکتا ہے۔  
جواب :- دو حقیقی اصلیں (۱، -۲) (۱، ۶) و تینوں میں واقع ہیں۔

۱۰۔ مساوات

$$۲ لا - لا^۲ + لا^۳ - لا^۲ + لا^۲ + لا^۲ - لا = ۵$$

کا تجزیہ کرو۔

ہیں معلوم ہوگا

$$۱ + لا^۲ + لا^۲ + لا^۲ + لا^۲ - لا = ۵$$

اور عمل حساب یہاں ختم ہو سکتا ہے۔  
جواب :- دو حقیقی اصلیں (۱، -۲) (۱، ۶) و واقع ہیں۔

۱۱۔ امتحان کرو کہ کس طرح مساوات

$$۲ لا^۲ + لا^۳ - لا^۲ + لا^۲ - لا = ۱۹۰$$

کی اصلیں، اعداد - ۵، -۴، ۶، ۷ کے درمیان مختلف وقفوں میں  
واقع ہوتی ہیں۔

$$۱۲ - لا^۲ + لا^۳ - لا^۲ + لا^۲ - لا = ۱۲$$

$$۲۰ + لا^۲ - لا^۳ + لا^۲ - لا^۲ + لا^۲ - لا = ۲۰$$

$$+ لا^۲ - لا^۳ + لا^۲ - لا^۲ + لا^۲ - لا = ۲۰$$

مندرجہ بالا مقداروں کے اندراج سے حاصل ہوگا

$$+ - + - (\infty -)$$

$$+ - . + (-)$$

$$+ + + + (6)$$

$$+ + + + (\infty +)$$

جب کبھی (جس طرح کہ موجودہ مثال میں) کوئی مقدار امدادی تفاعلوں میں سے ایک تفاعل کو صفر بنا دے (یہاں ف، لا، = کو۔ ۷ پورا کرتا ہے) تو صفر جس صف میں ہے اس میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد شمار کرتے ہیں مگر کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے کیونکہ اسکی ہر جانب کی علامتیں مختلف ہونے کی وجہ سے صف میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد میں کوئی تغیر واقع نہیں ہو سکتا خواہ معدوم ہونیوالی مقدار کی علامت کونسی بھی فرض کر لی جائے۔ سب اصلیں حقیقی ہیں۔ ایک اصل، - ۵ اور - ۷ کے درمیان۔ دواصلیں، - ۷ اور ۶ کے درمیان۔

۱۲۔ مساوات

$$۳ لا - ۶ لا - ۸ لا - ۳ = ۰$$

کا تجزیہ کرو۔

$$۲ = لا - ۳ لا - ۳ لا$$

یہاں

$$ف = لا = (لا + ۱)$$

چونکہ ف، لا، کامل مربع ہے، عمل حساب ختم کیا جاسکتا ہے۔  
جواب :- دو حقیقی اصلیں، و قنوں (-۱، ۱) اور (۲، ۱) میں واقع ہیں۔

۹۹۔ مساوات کی اصولوں کے حقیقی ہونے کی شرطیں۔ اسٹرم (210)

کے تفاعلوں کی تعداد جب اس میں ف (لا)، ف (لا)، اور ن - ۱ باقیوں کو شامل کیا جائے عام طور پر ن + ۱ ہوگی۔ بعض صورتوں میں مجوزہ مساوات میں چند قنوں کی عدم موجودگی کی وجہ سے چند باقی

موجود نہیں ہونگے۔ یہ صرف اس وقت واقع ہو سکتا ہے جب مجوزہ مساوات میں خیالی اصلیں ہوں کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ لا کے  $\infty$  سے  $+$  تک جانے میں تفاعلوں کے سلسلہ میں علامت کی  $n$  تبدیلیوں کا نقصان ہونے کے لئے سب تفاعلوں کا موجود ہونا ضروری ہے۔ اور مزید یہ کہ یہ سب تفاعل ایک ہی علامت اختیار کریں جبکہ لا  $\infty$  اور متبادل علامتیں جبکہ لا  $= -\infty$ ۔ اب چونکہ مساوات کی پہلی رقم کو ہمیشہ مثبت علامت کے ساتھ لیا جاتا ہے اس لئے کسی مساوات کی سب اصلوں کو حقیقی ہونے کی شرط کو یوں بیان کیا جاتا ہے:-  $n$  ویں درجہ کی مساوات کی سب اصلیں حقیقی ہونیکے لئے اسٹرم کے تمام باقیوں کے صدر سر جو تعداد میں  $n$ ۔ اہیں مثبت ہونے چاہئیں۔

## مثالیں

۱۔ وہ شرط معلوم کرو کہ مساوات

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$$

کی اصلیں حقیقی اور غیر مساوی ہوں۔

جواب:- ب۔ ۱۔ ۲۔ ۳۔ ۴۔

۲۔ وہ شرطیں معلوم کرو کہ کمی

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 5 = 0$$

کی سب اصلیں حقیقی اور غیر مساوی ہوں۔

جب اس کمی کی سب اصلیں حقیقی ہوں تو یہ ظاہر ہے کہ یہ کمی جس عام کمی سے اخذ کیا گیا ہے اسکی سب اصلیں بھی حقیقی ہیں۔ اس لئے عام کمی کی اصلوں کے حقیقی ہونے کی شرطیں معلوم کرنے میں مندرجہ بالا شکل پر بحث کرنا کافی ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ

$$ف_۱ (ی) = ی + ۱ھ$$

$$ف_۲ (ی) = ۲ھ - ی - گ$$

$$ف_۳ (ی) = - (گ + ۲ھ)$$

[انکو محسوب کرنے میں ف<sub>۱</sub> (ی) کو ف<sub>۲</sub> (ی) سے تقسیم کرنے سے

قبل ف<sub>۱</sub> (ی) کو مثبت جزو ضربی ۲ھ سے ضرب دو۔]۔

پس ۱ھ - ۲ھ = ۱ھ منفی اور گ + ۲ھ = ۲ھ منفی۔

ان کو ایک شرط میں بیان کیا جاسکتا ہے یعنی گ + ۲ھ = ۲ھ منفی

کیونکہ اس سے ۱ھ کا منفی ہونا لازم آتا ہے (دیکھو دفعہ ۴۳)۔

۳۔ چار درجہ

(۲۱۱)

$$ی + ۱ھ + ۲گ + ۳ی + ۴ع - ۵ھ =$$

کے لئے اسٹرم کے باقی محسوب کرو۔

ہم معلوم کرتے ہیں

$$ف_۱ (ی) = ۳ھ - ی - ۳گ - (۴ع - ۵ھ)$$

$$ف_۲ (ی) = - (۲ھ - ۳ع - ۳گ - ی)$$

$$ف_۳ (ی) = ۴ع - ۲ج$$

انکو دفعہ ۳ کی تہانہ کی مدد سے آسانی کے ساتھ حاصل کیا جاسکتا ہے

ف<sub>۱</sub> کو ف<sub>۲</sub> سے تقسیم کرنے سے پیشتر مثبت جزو ضربی ۳ھ سے ضرب

اور جب باقی معلوم ہو جائے تو مثبت جزو ضربی ۱ کو جدا کر دو۔ ف<sub>۱</sub> کو

ف<sub>۲</sub> سے تقسیم کرنے سے پیشتر مثبت جزو ضربی (۲ھ - ۳ع - ۳ج)

سے ضرب دو اور جب باقی معلوم ہو جائے تو مثبت جزو ضربی ۱ کو جدا کر دو۔

۱۰۰۔ چار درجہ کی اصولوں کے حقیقی ہونیکے لئے شرطیں۔

جو تھے درجہ کی عام جبری مسادات کی اصولوں کی نوعیت کو جاننے کے

معیار اسٹرم کے ہر نقطہ سے حاصل کرنے کے لئے دفعہ مابقی کی مثال ۳ کی



مساوات پر غور کرنا کافی ہے۔ اس مثال میں اسٹرم کے باقیوں میں صدر رقموں کے سروں کی شکلوں کی مدد سے ہم وہ شرطیں حاصل کر سکتے ہیں کہ چار درجہ کی سب اصلیں حقیقی اور غیر مساوی ہوں۔ چنانچہ ان شرطوں کی شکل یہ ہوگی

۵۲-ع۔ ۱۳-جے منفی، ۲-ع۔ ۲-جے مثبت

ہم دیکھتے ہیں کہ انہیں سے دوسری شرط شکل میں دفعہ ۶۸ کی متناظر شرط سے مختلف ہے۔ ان دونوں شکلوں کو متماثل ثابت کر نیکی لئے یہ ثابت کرنا ضروری ہے کہ جب ۱۳-جے منفی اور ۵-جے مثبت ہو تو مزید شرط ۵۲-ع۔ ۱۳-جے کے منفی ہونے سے یہ بات لازم آتی ہے کہ ۱۲-ع۔ ۱۲-جے منفی ہو اور اس کے بالعکس۔ دفعہ ۳ کی متماثل سے جو شکل ۱۵-ع۔ ۱۲-ع۔ ۱۲-جے = ۱۲-ع۔ ۱۲-جے میں لکھی گئی ہے یہ امر بالکل واضح ہے کہ جب ۱۳-جے اور ۵-جے دونوں منفی ہوں تو ۱۲-ع۔ ۱۲-جے بالضرور منفی ہے۔ اس کا عکس ثابت کرنے کے لئے ہم یہ دیکھتے ہیں کہ جب ۱۳-جے مثبت ہوتا ہے تو ۵۲-ع۔ ۱۳-جے منفی ہے کیونکہ ۵-جے مثبت ہونے کی وجہ سے ۵-جے مثبت ہے اور جب ۱۳-جے منفی ہوتا ہے تو پھر بھی ۵۲-ع۔ ۱۳-جے منفی ہے کیونکہ نامساواتوں ۱۲-ع۔ ۱۲-جے اور ۱۳-جے سے فوراً یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ منفی حصہ ۵۲-ع۔ مثبت حصہ ۱۳-جے سے بڑا ہے۔

طالب علم کو اسٹرم کے تفاضلوں کی مدد سے ان یقینی نتیجوں کی تصدیق کرنے میں کوئی مشکل نہیں ہوگی جو دفعہ ۶۸ کی مختلف صورتوں میں حاصل ہوئے تھے۔

## مثالیں

۱۔ مساوات

$$x^2 - 11x + 22 = 0$$

کی اصولوں کو جدا کرنے میں بودا ان کا طریقہ استعمال کرو۔

جواب :- اسکی اصلیں وقفوں (-۱)، (۲)، (۴)، (۵)، (۹)۔

میں ہیں۔

۲۔ مساوات

$$لا - لا^۲ + لا^۳ - لا^۴ + لا^۵ = ۰$$

کے تجزیہ میں اسٹرم کا مسئلہ استعمال کرو۔

اس قسم کے چار درجہ کا تجزیہ کرنے میں جس کی دو اصلیں صحیحاً حقیقی ہیں ہم عمل حساب کو اس وقت ختم کر سکتے ہیں جب اسٹرم کا وہ باقی حال ہو جائے جس کی صدر رقم کا سرمنفی ہے کیونکہ ایسی صورت میں اصولوں کے دوسرے زونج کو خیالی ہونا چاہئے اور حقیقی اصولوں کے مقامات دی ہوئی مساوات میں اندراج کے ذریعہ آسانی کے ساتھ معلوم کئے جا سکتے ہیں۔

جواب :- دو اصلیں خیالی، دو حقیقی اصلیں وقفوں (-۱)، (۲)، (۳) میں

۳۔ اسی طریقہ پر مساوات

$$لا - لا^۵ + لا^۱۰ - لا^۱۶ + لا^۲۱ = ۰$$

کا تجزیہ کرو۔

جواب :- دو اصلیں خیالی، دو حقیقی، دو وقفوں (-۱)، (۳)، (۴) میں

۴۔ مساوات

$$لا + لا^۳ - لا^۵ + لا^۷ + لا^۱۱ = ۰$$

کے تجزیہ میں اسٹرم کا مسئلہ استعمال کرو۔

جواب :- سب اصلیں خیالی۔

۵۔ اسٹرم کے طریقہ سے مساوات

$$لا - لا^۱۰ + لا^۱۶ + لا^۲۱ + لا^۲۶ = ۰$$

کی حقیقی اصولوں کی تعداد اور ان کا محل وقوع دریافت کرو۔

جواب :- سب اصلیں حقیقی۔ ایک اصل وقفہ (-۲) میں، (۳) میں،

دو اصلیں وقفہ (-۱) میں اور دو مثبت اصلیں وقفوں (-۱)، (۳) میں

۶۔ ذیل کی مساوات کے لئے اسٹرم کے تقاضوں کو محسوب کرو اور بتاؤ کہ سب اصلیں حقیقی ہیں:-

$$۵-۵\lambda + ۵\lambda^2 + ۵\lambda^3 - ۵\lambda^4 = ۱$$

۷۔ ذیل کی مساوات کے لئے اسٹرم کے تقاضوں کو محسوب کرو اور بتاؤ کہ چار اصلیں خیالی ہیں:-

$$۳\lambda^4 + ۵\lambda^3 + ۲ = ۰$$

طالب علم بہ آسانی دیکھ لگا کہ یہ مثال اور مثال باسابقہ ایسی مثالیں ہیں جنہیں ایک جزو ضربی ہے جو اسٹرم کے دو غیر متصل باقیوں میں مشترک ہے۔  
۸۔ مساوات ذیل کے لئے اسٹرم کے تقاضوں کو محسوب کرو اور اصلوں کی نوعیت کے متعلق مثال ۳ صفحہ ۱۵۳ کے نتیجوں کی تصدیق کرو:-

$$۵-۵\lambda + ۵\lambda^2 + ۲ = ۰$$

۹۔ ثابت کرو کہ اگر ج کی ایک کے سوا کوئی قیمت ہو تو مساوات

$$۱-۲\lambda + ۲\lambda^2 = ۰$$

کی اصلوں کا ایک زوج خیالی ہے۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$۱-۲\lambda + ۲\lambda^2 + ۲\lambda^3 = ۰$$

کی سب اصلیں حقیقی ہیں۔ اس کو حل کرو جب مقداروں 'ا'، 'ب'، 'ج' میں سے دو مساوی ہو جائیں۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ جب چار درجی

$$۴\lambda^4 + ۲\lambda^3 + ۲\lambda^2 + ۲\lambda + ۱ = ۰$$

کا ایک جزو ضربی تیسرا ہو تو اس کو عقل ذیل میں بیان کیا جاسکتا ہے:-

$$\{۲\lambda^2 + ۲\lambda + ۱\} \{۲\lambda^2 + ۲\lambda + ۱\} \{۲\lambda^2 + ۲\lambda + ۱\}$$

۱۲۔ اسٹرم کے باقیوں کے ذریعہ ان شرطوں کی تصدیق کرو جنکو پورا ہونا چاہئے جبکہ مثال باسابقہ کا چار درجی کامل مربع ہو اور اس صورت میں ثابت کرو کہ

$$\text{ا ف (لا) = } \{ (لا + ب) + ۳ھ \}$$

۱۳۔ ثابت کرو کہ جب اسٹرم کے سب تفاعل موجود ہوں تو ان تفاعلوں کی صدر رقموں کے سروں میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد مساوات کی خیالی اصولوں کے زوجوں کی تعداد کے مساوی ہوتی ہے۔

۱۴۔ اگر پانچ درجی کے لئے اسٹرم کے باقیوں میں سے پہلے دو کی صدر رقموں کی علامتیں - + ہوں تو ثابت کرو کہ حقیقی اصولوں کی تعداد متغیر ہو جاتی ہے۔  
جواب :- صرف ایک اصل حقیقی۔

۱۵۔ اگر ھ اور جے دونوں مثبت ہوں تو ثابت کرو کہ چار درجی کی سب اصلیں خیالی ہیں اور یہ کہ انہی شرطوں کے تحت پانچ درجی کی صرف ایک اصل حقیقی ہوتی ہے جب اس کو ثنائی سروں کے ماتحت لکھا جائے۔  
(سٹرایم - رابرٹس، ڈبلن کنفرنس پیپر ۱۸۸۲ء)

۱۶۔ اسٹرم کے مسئلہ کے استعمال میں اگر ایسا تفاعل لمبائے جس کی علامتیں سب کی سب مثبت ہیں یا سب کی سب منفی تو ابتدائی مساوات کی مثبت اصولوں کی تعداد اور ان کے محل وقوع کی جانچ اسٹرم کے نچلے تفاعلوں کی مدد کے بغیر کی جاسکتی ہے۔ لیکن اگر ایسا تفاعل لمبائے جس کی علامتیں باری باری سے مثبت اور منفی ہیں تو ابتدائی مساوات کی منفی اصولوں کی جانچ بھی اسی طریقہ پر کی جاسکتی ہے۔

۱۷۔ اگر کسی مساوات ف (لا) = کی سب اصلیں حقیقی ہوں تو ثابت کرو کہ اسٹرم کے امدادی تفاعلوں میں سے ہر ایک تفاعل کی سب اصلیں بھی حقیقی ہیں اس کو اسی طرح کے استدلال سے ثابت کیا جاسکتا ہے جو دفعہ ۹۴ میں

استعمال کیا گیا ہے۔ وہیں باقی سلسلے پر غور کرو اور فرض کرو کہ اس کا درجہ م ہے۔ کیا اور وہ م تفاعل جو اسکے بعد آتے ہیں ایک ایسا سلسلہ بناتے ہیں جس میں کوئی دو متصلہ تفاعل باہم معدوم نہیں ہو سکتے۔ جب لا = ۰۰ تو انہی علامتیں

باری باری سے مثبت اور منفی ہیں لیکن جب 'لا'  $= +$  تو یہ سب مثبت ہیں۔  
اس لئے 'لا' جب '۔' سے  $\infty + \infty$  تک جاتا ہے تو علامت کی م  
تبدیلیاں کم ہو جاتی ہیں اور یہ ظاہر ہے کہ علامت کی کوئی تبدیلی کم نہیں ہو سکتی  
سوائے اس صورت کے جبکہ 'لا' مساوات  $\infty =$  کی ایک اصل میں سے  
گذرے۔ پس اس مساوات کی م حقیقی اعلیں ہیں۔

اب چونکہ 'لا' کی وہ قیمت جو کسی تفاعل کو معدوم کرتی ہو دو متضاد  
تفاعلوں کو مختلف علامت بناتی ہے اس لئے آسانی کے ساتھ نتیجہ نکالنا  
ہے کہ سلسلہ کی کوئی مساوات بلحاظ اس تفاعل کے جو اس کے پیشتر ہے انتہائی  
مساوات ہے۔

۱۸۔ اگر اسٹرم کے امدادی تفاعلوں میں سے کسی ایک تفاعل  
ف م (لا) کی حقیقی اعلیں معلوم ہوں تو ثابت کرو کہ ابتدائی مساوات کی  
اصول کی تعداد اور محل وقوع ف م (لا) کے نیچے دیگر تفاعلوں کی امداد  
کے بغیر متعین ہو سکے ہیں۔

(21)

فرض کرو۔ ف م (لا)  $=$  کی حقیقی اعلیں مقدار کی ترتیب میں  
عہ 'ب'..... 'ب' یہ طہ ہیں اور بقیہ اعلیں خیالی ہیں۔ لا جب  $\infty$  سے  
طہ سے کسی قدر چھوٹی قیمت تک بدلتا ہے تو تفاعل ف م (لا) اپنی  
علامت نہیں بدلتا اور س لئے ف م (لا)  $=$  کی اصولوں کی جانچ نہیں  
جو ان حدود کے درمیان واقع ہوں ف م (لا) کے بعد آنے والے  
اسٹرم کے تفاعلوں کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ یہی بات اس وقت صادق  
آتی ہے جبکہ 'لا' طہ سے ذرا بڑی قیمت سے نیچے سے ذرا چھوٹی قیمت  
گزر رہا ہے۔ اور سہی طرح دوسرے وقتوں کے لئے ہیں۔ پس اگر ہم وہ قبول  
د۔  $\infty$  'ب'..... 'ب' (براعہ) کی ایک الگ جانچ کریں تو ہمیں  
مساوات کی اصولوں کی تعداد جو ان میں سے ہر ایک میں واقع ہوتی ہے  
اسٹرم کے نیچے کے تفاعلوں کی مدد سے بغیر متعین کی جا سکتی ہے۔

۱۹۔ اگر اسٹرم کے امدادی تفاعلوں میں سے کسی ایک میں خیالی

اصلیں ہوں تو ابتدائی مساوات میں کم از کم اتنی ہی تعداد خیالی اصلوں کی ہوگی۔  
(مسٹر ایف۔ بیرسر)  
اس کو مثال مابقی سے اس طرح اخذ کیا جاسکتا ہے کہ علامت کی تبدیلیوں کی بڑی سے بڑی تعداد کا انتخاب کیا جائے جو ف (لا) پر ختم ہونیوالے تقاعلوں کے سلسلہ میں کم ہو جاتی ہیں جبکہ لا۔ ۷ سے ۷۰ تک بدلتا ہے۔ یہ یاد رہے کہ جہاں تک اس محدود سلسلہ کا تعلق ہے لا کے ف (لا) = ۰ کی ہر اصل میں سے گزرنے پر علامت کی ایک تبدیلی کا اضافہ ہو سکتا ہے۔

۲۰۔ مثال ۸ کا طریقہ دفعہ ۹۸ مثال ۱ میں استعمال کرو۔  
آخری دو اسٹرم کے تقاعلوں کو نظر انداز کرنے سے

$$ف (لا) \equiv لا^۳ + لا^۲ + لا + ۱۰ + لا + ۱$$

$$ف (لا) \equiv لا^۴ + لا^۳ + لا^۲ + لا + ۱۴ + لا + ۱۰$$

$$ف (لا) \equiv لا^۵ + لا^۴ + لا^۳ + لا^۲ + لا + ۱۴ + لا + ۱۰$$

یہ آسانی سے معلوم ہو جاتا ہے کہ  $ف (لا) = ۰$  کی اصلیں وقفوں  
(۳-۲) اور (۱۰-۱) میں واقع ہوتی ہیں۔ مساوات ف (لا) = ۰ میں  
دو اصلیں خیالی ہیں کیونکہ  $لا$  کا سرمنفی ہے۔ حقیقی اصلیں اگر کوئی  
ہوں منفی ہونی چاہئیں۔ مندرجہ بالا میں تفاعل وقفوں (۷-۳) اور  
(۲-۱) میں اصلوں کے وجود اور محل وقوع کو متعین کر چکے لئے کافی ہیں۔ یہ  
فورا معلوم ہو جاتا ہے کہ ابتدائی مساوات کی دو حقیقی اصلیں موخر الذکر وقفہ  
میں واقع ہوتی ہیں۔

بہت سی مثالوں میں اسٹرم کے آخری دو تقاعلوں کو اس طور پر  
نظر انداز کرنا ممکن ہوگا۔ ہم دیکھتے ہیں کہ دو درجہ تفاعل کی اصلوں کو ٹھیک  
طور پر معلوم کرنا ضروری نہیں ہے بلکہ صرف وہ وقفے دریافت کر لئے جائیں  
جس میں وہ واقع ہوتی ہیں۔

# گیارہواں باب

## عددی مساواتوں کا حل

(215)

۱۰۱۔ جبری اور عددی مساواتیں۔ جبری اور عددی مساواتوں کے حل میں ایک اصولی فرق ہے۔ قبل الذکر میں نتیجہ کو خالص حریفی نوعیت کے عام ضابطہ سے بیان کیا جاتا ہے۔ یہ چونکہ ایک اصل کے لئے عام جملہ ہوتا ہے اس لئے بلا امتیاز تمام اصولوں کو تعبیر کرتا ہے۔ اس جملہ کو ایسا ہونا چاہئے کہ اس میں سروں کے جو تفاعل شامل ہوتے ہیں انہی بجائے اصولوں کے متناظر متشاکل تفاعلوں کو درج کیا جائے تو جذری علامات  $\sqrt{\quad}$ ،  $\sqrt[3]{\quad}$  سے تعبیر ہو نیوالے اعمال قابل عمل ہو جائیں اور جب ان متشاکل تفاعلوں کے جذر الکعب اور جذر المربع نکالے جائیں تو اصولوں کا یہ جملہ ایک اصل میں تحویل ہو جائے، مختلف اصلیں جذر المربعوں  $\pm \sqrt{\quad}$  اور جذر الکعبوں  $\sqrt[3]{\quad}$ ،  $\sqrt[3]{\quad}$  سے مختلف اجتماعوں سے حاصل ہو گئی۔ اس بیان کی سادہ مثال دفعہ ۵۵ میں دودرجی کے لئے ملیگی۔ دفعات ۵۹ اور ۶۶ میں کعبی اور چار درجی کے لئے اسی قسم کی مثالیں درج ہیں۔ یہ بھی یاد رہے کہ وہ ضابطہ جو جبری مساوات کی اصل کو تعبیر کرتا ہے اس وقت بھی درست رہتا ہے جب مساوات کے سرخیالی مقداریں ہوں۔

(216)

عددی مساواتوں کی صورت میں اصولوں کو ایسے طریقوں سے جو ابھی بیان کئے جانے لگے فرداً فرداً معلوم کیا جاتا ہے۔ کسی ایک اصل کو تقریبی طور پر معلوم کرنے سے پیشتر عموماً یہ ضروری ہے کہ وہ ایک معلومہ وقفہ میں واقع ہونی چاہئے جس میں کوئی دوسری حقیقی اصل شامل نہ ہو۔  
عددی مساواتوں کی حقیقی اصلیں یا متواتر ہو سکتی ہیں یا متباہن پہلی جماعت میں اعداد صحیح کسرات اور مختصم یا متولی اعشاریہ جو کسرات میں تحویل ہو سکتی ہیں شامل ہیں۔ دوسری جماعت غیر مختصم اعشاریہ پر مشتمل ہے۔ پہلی جماعت کی اصلیں ٹھیک ٹھیک معلوم ہو سکتی ہیں اور دوسری جماعت کی اصولوں کو صحت کے کسی درجہ تک تقریباً معلوم کیا جاسکتا ہے۔

اس نام ایک ایسے مسئلہ سے ابتدا کریں گے جو پہلی جماعت کی اصولوں کی تفہیم کو ایسی اصولوں کی تعیین میں تحویل کر دیتا ہے جو صرف صحیح عدد ہیں۔

۱۰۲۔ مسئلہ۔ جس مساوات میں پہلی رقم کا سر ایک ہو اور دوسری رقموں کے سر صحیح اعداد ہوں اس میں کوئی ایسی متوافق اصل نہیں ہو سکتی جو صحیح عدد نہیں ہے۔

کیونکہ اگر ایسا ممکن ہو تو فرض کرو کہ مساوات

$$a^0 + b^1 + c^2 + \dots + n^0 + 1 = 0$$

کی ایک اصل  $\frac{1}{p}$  ہے جو مختصر ترین شکل میں ایک کسر ہے۔ تب

$$\left(\frac{1}{p}\right)^0 + b^1 + c^2 + \dots + n^0 + 1 = 0$$



اس کو ب<sup>۱-۰</sup> سے ضرب دو تو

$$- \frac{1}{b} = b^1 + b^2 + b^3 + \dots + b^{n-1} + b^n$$

اب یہ ظاہر ہے کہ  $b^1$ ،  $b^2$  سے تقسیم نہیں ہوتا اور مساوات کی بائیں جانب کی ہر رقم ایک صحیح عدد ہے یعنی مختصر ترین شکل کی ایک کسر ایک صحیح عدد کے مساوی ہے جو نا ممکن ہے۔ پس مساوات کی اہل  $\frac{1}{b}$  نہیں ہو سکتی۔ اس لئے اسکی حقیقی اصلیں یا تو صحیح اعداد ہیں یا متباین مقداریں۔

ہر وہ مساوات جس کے سر محدود، کسری یا صحیح عدد ہوں، ایسی شکل میں تحویل کیا جاسکتی ہے جس میں بائیں رقم کا سر ایک اور دوسری ارقام کے سر صحیح عدد ہوں (دیکھو دفعہ ۳۱) پس کمبوا کی استعمالہ کی مدد سے متوافق اصلوں کی تعیین یا عمومی صحیح عددی اصلوں کی تعیین میں تحویل کیا جاسکتی ہے۔ اب ہم نیوٹن کا وہ طریق عمل بیان کریں گے جس سے کسی مساوات کی صحیح عددی اصلیں حاصل ہوتی ہیں جبکہ اس مساوات کے سر سب سب صحیح عدد ہوں۔ اس طریقہ کو مقسوم علیہم کا طریقہ کہتے ہیں۔

۱-۳۔ نیوٹن کا مقسوم علیہم کا طریقہ۔ فرض کرو کہ مساوات

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (1)$$

کی ایک صحیح اصل  $h$  ہے۔ اس کثیر الارقام کو  $h$  سے تقسیم کرنے کے بعد فرض کرو کہ خارج قسمت

$$b^1 + b^2 + b^3 + \dots + b^{n-1} + b^n$$





لیکن یہ عمل ابتدائی سروں  $1, 1, 1, \dots$  پر نہیں بلکہ دوسری سطر کے مقداروں پر انہی علامتیں بدل کر کرنا چاہئے کیونکہ یہ مقداریں خارج قسمت کے سر ہیں جب ابتدائی کثیر الارقام کو لا۔ ۵ سے تقسیم کیا جاتا ہے۔ اگر کسی مقسوم علیہ سے اثنائے عمل میں کسی منفرل پر کسری نتیجہ حاصل ہو تو اس کو فوراً خارج کر دینا چاہئے اور عمل کو روک دینا چاہئے۔

مقسوم علیہ ۱ اور ۱ جو صریحاً ان کے ہمیشہ صحیح مقسوم علیہ ہیں ان کو آزمائشی مقسوم علیہ کی تعداد میں شامل کرنے کی ضرورت نہیں کیونکہ مقسوم علیہ کے طریقہ کو استعمال کے بغیر بہت آسانی کے ساتھ معمولی اندراج سے یہ بتایا جاسکتا ہے کہ آیا ان میں سے کوئی عدد مساوات کی اصل ہے یا نہیں۔

## مثالیں

(219)

۱۔ مساوات

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + 7^2 - 8^2 + 9^2 - 10^2 = 0$$

کی صحیح اصلیں معلوم کرو۔  
 رتوں کو گروہوں میں تقسیم کرنے سے (دفعہ ۸) بغیر کسی مشکل کے ہم یہ دیکھتے ہیں کہ اس کی سب اصلیں ۵ اور ۵ کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔  
 ذیل کے مقسوم علیہ ممکنہ اصلیں ہیں:-

$$1^2 - 2^2 - 3^2 - 4^2 - 5^2 - 6^2 - 7^2 - 8^2 - 9^2 - 10^2$$

ہم ۴ سے شروع کرتے ہیں:-

$$1^2 - 2^2 - 3^2 - 4^2 - 5^2 - 6^2 - 7^2 - 8^2 - 9^2 - 10^2$$

$$\frac{1}{5} - \frac{6}{32}$$

عمل یہاں رک جاتا ہے کیونکہ ۵، ۴ سے پورا تقسیم نہیں ہوتا۔ پس ۴ اصل

نہیں ہے۔

اب ہم عدد ۳ کے ساتھ عمل کرتے ہیں:-

$$۱ \quad ۲ \quad ۳۸ \quad ۲۴ \quad ۱۳$$

$$\frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۳} = \frac{۱۰}{۳} = \frac{۸}{۳}$$

پس ۳ ایک اصل ہے۔ ۲ کے ساتھ عمل کرنے میں جیسا کہ اوپر بتایا گیا ہم دوسری سطر کے سروں سے انکی علامتیں بد لکر فائدہ اٹھاتے ہیں:-

$$۱ \quad ۱ \quad ۱۰ \quad ۸$$

$$\frac{۱}{۱} = \frac{۳}{۲} = \frac{۴}{۶}$$

پس ۲ بھی ایک اصل ہے۔ پھر ۲ کے ساتھ عمل کرنے سے

$$۱ \quad ۳ \quad ۴$$

$$\frac{۲}{۵}$$

عمل ۵ پر رک جاتا ہے کیونکہ یہ ۲ سے تقسیم نہیں ہوتا۔ پس ۲ اصل نہیں ہے۔  
۳ بھی اصل نہیں ہے کیونکہ یہ ۴ کو تقسیم نہیں کرتا۔

[ہم ۳ کو پہلے ہی خارج کر سکتے تھے کیونکہ تقسیم کثیر لا مقام کی مطلق رقم کو تقسیم نہیں کرتا۔ اس بات کو پیش نظر رکھنے سے مقسوم علیہم کی تعداد گھٹانے میں اکثر فائدہ ہوتا ہے]

اب ہم آخری مقسوم علیہ ۴ کو لیتے ہیں:-

$$۱ \quad ۳ \quad ۴$$

$$\frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۴}$$

پس ۴ بھی اصل ہے۔  
اس لئے سادات کی صحیح اصلیں ہیں ۳، ۲، ۴ اور عمل کی آخری

منزل ہے یہ ظاہر ہے کہ جب ابتدائی کثیرالارقام کو ثنائی جملوں لا - ۳، لا - ۲ سے تقسیم کیا جاتا ہے تو نتیجہ لا - ۱ حاصل ہوتا ہے اور اس لئے ایک بھی ایک اصل ہے۔ پس ابتدائی کثیرالارقام کو شکل

$$(لا - ۱)(لا - ۲)(لا - ۳)(لا + ۴)$$

میں رکھا جاسکتا ہے۔

۲۔ مساوات ۳ لا<sup>۴</sup> - ۲۳ لا<sup>۳</sup> + ۳۵ لا<sup>۲</sup> + ۳۱ لا - ۳۰ = ۰ کی صحیح اصلیں معلوم کرو۔

اسکی اصلیں ۲ اور ۸ کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔ پس صرف مقسوم علیہم ۲، ۳، ۵، ۶ کو آزمانا ہوگا۔ ہم فوراً معلوم کر لیتے ہیں کہ ۶ اصل نہیں ہے۔ ۵ کے لئے ہم حاصل کرتے ہیں

$$۳۰ - ۳۱ ۳۵ - ۲۳ ۳$$

$$\frac{۳۰}{۲۵} = \frac{۵}{۴۰} = \frac{۸}{۱۵} = \frac{۳}{۲۰}$$

پس ایک اصل ۵ ہے۔ ۳ کے لئے ہم معلوم کرتے ہیں

$$۶ - ۵ - ۸ - ۳$$

$$\frac{۶}{۳} = \frac{۱}{۹} = \frac{۳}{۲۷}$$

اس لئے ۳ بھی ایک اصل ہے۔ ہم آسانی کے ساتھ یہ معلوم کر لیتے ہیں کہ اصل نہیں ہے۔

ابتدائی کثیرالارقام کو (لا - ۵)(لا - ۳) سے تقسیم کیا جائے تو خارج قسمت آخری عمل کی رو سے ہے

$$۳ لا + لا - ۲$$

جبکہ ایک اصل - ۱ ہے۔ پس مجوزہ مساوات کی تمام صحیح اصلیں - ۱، ۳، ۵ ہیں۔



تفصیل کے ساتھ استعمال کرنے سے پیشتر ان مقسوم علیہم کی تعداد کو گھٹانا ضروری ہے جنکو آزمانے کی ضرورت ہے۔ اس کو حسب ذیل طریقہ سے عمل میں لایا جاسکتا ہے:-

اگر ف (لا) = کی ایک صحیح اصل ھ ہے تو جیسا کہ اوپر بتایا گیا ف (لا) ۱- ھ سے پورا تقسیم ہو جاتا ہے اور خارج قسمت کے سر صحیح اعداد ملتے ہیں۔ اس لئے اگر ہم لا کو کوئی صحیح عددی قیمت دیں اور ف (لا) کی متناظر قیمت کو لا- ھ کی متناظر قیمت سے تقسیم کریں تو خارج قسمت ایک صحیح عدد ہونا چاہئے۔ سہولت کی خاطر ہم سادہ ترین صحیح اعداد ۱ اور -۱ لیتے ہیں اور کسی مقسوم علیہ ھ کو آزمانے سے پیشتر ہم اس پر یہ شرط عائد کر دیتے ہیں کہ ف (لا) ۱- ھ سے تقسیم ہو جائے (یا علامت کو بدل دینے سے ھ- ۱- ھ سے تقسیم پذیر ہو جائے) علامت کو بدلدینے سے ھ+ ۱- ھ سے-

اس نتیجہ کو استعمال کرتے وقت سب سے پہلے ف (۱) اور ف (-۱) کو محسوب کرنے میں سہولت ہوگی۔ اگر ان میں سے کوئی ایک معدوم ہو جائے تو متناظر صحیح عدد ایک اصل ہے اور پھر ہم اس تحلیل شدہ کثیرالارقام پر عمل جاری کریں گے جس کے سر اس نتیجہ کو معلوم کرنے کے عمل میں حاصل ہوتے ہیں جو زیر بحث صحیح عدد کو درج کرنے سے ملتا ہے۔

## مثالیں

۱۔ لا ۲۳- لا ۱۶۰- لا ۲۸۱- لا ۲۵۷- لا ۴۴۰۔

اصلیں - ۱ اور ۲۴ کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔

حسب ذیل مقسوم علیہم حاصل ہوتے ہیں:-

۲۲، ۲۰، ۱۱، ۱۰، ۸، ۵، ۴، ۲

ہم آسانی کے ساتھ حاصل کر لیتے ہیں



ف. (1) = ٨٢. ، ف. (1-) = ٩٢٨

اس لئے ہم وہ تمام مقسوم علیہم خارج کر دیتے ہیں جو بقدر ایک کے گھٹ جانے کے بعد ۸۴ کو تقسیم نہیں کرتے، اور جو بقدر ایک کے بڑھ جانے کے بعد ۸۴ کو تقسیم نہیں کرتے۔ اپنی شرط ۱۰ اور ۲۰ کو خارج کرتی ہے اور دوسری شرط ۴ اور ۲۲ کو۔ باقی اعداد ۲، ۵، ۸، ۱۱ پر مقسوم علیہم کا طریقہ استعمال کرنے سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ ۵، ۸، ۱۱ اصلیں ہیں اور حاصل خارج قسمت لا + لا + لا ہے۔ پس دیا ہوا کثیر الارقام جملہ

$$(لا - لا)(لا - لا)(لا - لا)(لا - لا)(لا - لا)(لا - لا)(لا - لا)(لا - لا)$$

$$= 40 + 032 - 031 + 031 - 029 - 0 = 43$$

اصلیں - ۳ اور ۳۲ کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔

مقسم علیہم ہیں :-

३. '२. '१५ '१२ '१ - '५ '५ '४ '३ '२ -

ف (۱) = 'اس لئے ایک اصل ہے۔

ک (۱) = ۱۰ اسے ایک ال ہے۔  
 ف (۱) = ۱۲۴ - اوپر کی شرط - ۲، ۳، ۳۰ کے سوا سب کو خارج کر دیتی ہے۔  
 آسانی کے ساتھ یہ معلوم ہو جائیگا کہ ۲ اور ۳۰ اصلیں ہیں اور آخری  
 خارج قسمت ۱ ہے۔ پس دیا ہوا اکثر الارقام (۱-لا) (۳۰-لا) (۲+لا) (۲+لا) کے معادل ہے۔

۶۔۱۔ ضعیفی اصولوں کی تعیین۔ مقسوم علیہم کا طریقہ ضعیفی اصولوں کی

تعیین کرتا ہے جبکہ وہ متوافق ہوں۔ اس طریقہ کو استعمال کرنے میں جب  
ان کا کوئی مقسوم علیہ جس کا اصل ہونا معلوم ہو چکا ہے تو خول شدہ کثیر الارقام  
کی رقم مطلق کا مقسوم علیہ ہو تو ہمیں اس بات کا امتحان کر لینا چاہئے کہ وہ  
موزن الذکر کی اصل بھی ہے یا نہیں۔ اگر وہ خول شدہ کثیر الارقام کی اصل ہے تو ایسی  
صورت میں وہ مجوزہ مساوات کی دہری اصل ہے۔ اگر وہ دوسرے خول شدہ

کثیر الارقام کی اصل بھی ہو تو وہ مجوزہ مساوات کی تہری اصل ہے اور علیٰ ہذا تقیاً جب کبھی کسی مساوات میں ر مرتبہ تکرار یا نیوالی صرف ایک ضعیفی اصل ہو تو اس کو اس طریقہ پر معلوم کیا جاسکتا ہے کیونکہ ایسی صورت میں ف (لا) اور ف (لا) کا مقسوم علیہ اعظم (لا - ع) کی شکل کا ہوگا اور اگر ع متباین ہو تو اس کے سر متوافق نہیں ہو سکتے۔ ضعیفی اصلیں (228) تیسرے چوتھے اور پانچویں درجوں کی مساواتوں کی ضعیفی اصلیں مقسوم علیہ اعظم معلوم کرنے کے عمل کی مدد سے بغیر پوری طرح معلوم کیجاسکتی ہیں جیسا کہ ذیل کے شواہدات سے واضح ہو جائیگا۔

(۱) یعنی - اس صورت میں ضعیفی اصلوں کو متوافق ہونا چاہئے کیونکہ اس کا درجہ اتنا بڑا نہیں ہے کہ دو جدا جدا اصلیں تکرار یا سکیں۔

(۲) چار درجی - اس صورت میں یا تو ضعیفی اصلیں متوافق ہیں یا یہ تفاعل ایک کامل مربع ہے۔ کیونکہ چار درجی کی وہ شکل جس میں دو جدا جدا اصلیں تکرار پا سکتی ہیں صرف یہ ہے۔

(لا - ع) (لا - ب)

یعنی ایک دو درجی کا مربع - چار درجی کی اصلیں متباین ہو سکتی ہیں۔ اس لئے اگر یہ معلوم ہو جائے کہ چار درجی کی اصلیں متوافق نہیں ہیں تو ہمیں یہ دیکھ لینا چاہئے کہ آیا وہ کامل مربع ہے تاکہ مساوی متباین اصلوں کا تعین ہو سکے۔

(۳) پانچ درجی - اس صورت میں یا تو ضعیفی اصلیں متوافق ہیں یا یہ تفاعل دو جملوں کا حاصل ضرب ہے، ایک خطی متوافق جزو ضربی اور دوسرا ایک دو درجی کا مربع۔ کیونکہ دو مختلف اصلوں کے تکرار پاسکئے کے لئے تفاعل کو شکلوں

(لا - ع) (لا - ب) (لا - ج) (لا - ع) (لا - ب)

میں سے کوئی نہ کوئی شکل اختیار کرنی چاہئے۔ موزر الذکر شکل میں اصلیں متباین نہیں ہو سکتیں۔ لیکن قبل الذکر ایسی صورت کا جواب ہو سکتی ہے

جس میں ایک متوافق جزو ضربی ایک دو درجی کے مربع سے مضروب ہو  
 جسکی اصلیں متباین ہیں۔ اس طرح اگر یا صحیح درجی میں متوافق اصلوں کا  
 غیر موجود ہونا معلوم ہو جائے تو اسکی اصلیں ضعیفی نہیں ہو سکتیں۔ اگر  
 اس میں صرف ایک متوافق اصل پائی جائے تو اس بات کا امتحان  
 کر لینا چاہئے کہ آیا باقی ماندہ جزو ضربی کا حل مربع ہے۔ اگر اس میں ایک سے  
 زیادہ متوافق اصلیں ہوں تو ضعیفی اصلیں متوافق اصلوں میں لینگی۔

### مثالیں

(224)

$$1 - 2 - 31 - 112 + 2 - 62 = 0$$

کی تمام متوافق اصلیں معلوم کرو۔

اصلیں حدود - ۱۶ کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔ مقسوم علیہم ۲، ۴، ۸

ہیں۔

$$\begin{array}{r} 2 \quad 31 - 112 \quad 62 \\ 2 - \quad 15 \quad 8 \\ \hline 0 \quad 16 - \quad 120 \end{array}$$

اس لئے ۸ ایک اصل ہے۔ اب تحویل شدہ مساوات پر عمل کرو

$$\begin{array}{r} 2 \quad 15 - 8 - \\ 2 - \quad 1 - \\ \hline 0 \quad 16 - \end{array}$$

۸ پھر ایک اصل ہے اور باقی ماندہ جزو  $2 + 1$  ہے۔

جواب :- ف (۱۱)  $\equiv (2 + 1)(8 - 1)$

$$2 - 3 - 30 - 6 - 56 = 0$$

کی متوافق اور ضعیفی اصلیں معلوم کرو۔

اصلیں حدود - ۱۲ کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔ (دفعہ ۸ مثال ۱)

کا طریقہ استعمال کرو)

جواب :-  $f(l) = (l+1)^2(l-1)$

$$= 14 + 11\alpha - \beta^2 - 12 - \beta^2 - 9 = -3$$

کی متوافق اور ضعیفی اصلیں دریافت کرو۔

اصلیں حدود ۵۴۲ کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔  
سادات جس شکل میں ہے اس میں صحیح اصلیں نہیں ہیں۔ لیکن پھر بھی  
اسکی اصل متوافق ہو سکتی ہے۔ اس کو جانچنے کے لئے اصولوں کو ۳ سے  
ضرب دو تاکہ لا کاسرا یک ہو جائے۔ تب ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$= 144 + 1120 - 121 - 121 - 121$$

اب اصلیں حدود - ۱۵۶ کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔

اسکی ایک دوہری اصل - ۴ ہے اور تفاعل،  $(۱۲+۱۱+۹) (۱۱+۱۲+۹)$  ۲

کے معادل ہے۔ اس لئے ابتدائی مساوات

$$= (r + 13)(1 + 12 - 1)$$

کے مماثل ہے۔

$$= r + \psi_{22} - \psi_{32} + \psi_{12} + \psi_{11} - r$$

کی متوافق اور ضعیفی اصلیں معلوم کرو۔

اصلیں - ۱۲ اور اسکے درمیان واقع ہوتی ہیں۔ اسلئے قابل امتحان مقسوم علیہم صرف - ۴ - ۲ - ۱ ہیں۔ ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ مساوات کی کوئی اصل متوافق نہیں ہے۔ اب ہم یہ دیکھتے ہیں کہ آیا دیا ہوا تفاعل کامل مربع ہے تفاعل کا جذر المربع نکالنے سے یا مثال ۳ صفحہ ۸۳ کی شرطوں کو استعمال کرنے سے یہ معلوم ہو سکتا ہے۔ چنانچہ یہ  $6 + 2 = 8$  کا مربع ہے (مثال صفحہ ۸۴) پس دی ہوئی مساوات مساوی اصولوں کے دو زوج رکھتی ہے اور دونوں متباین ہیں۔

۵- ف (لا) = لا<sup>۱</sup> - لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۳</sup> + لا<sup>۴</sup> + لا<sup>۵</sup> + لا<sup>۶</sup> = ۱

کی متوافق اور ضعیفی اصلیں معلوم کرو۔

اصولوں کے حدود - م، م، م ہیں۔

مساوات کی ایک اصل - ۳ ہے اور تحویل شدہ مساوات ہے

لا - ۴ لا<sup>۲</sup> + ۸ لا + ۲ = ۰  
اور کوئی دوسری متوافق اصل موجود نہیں ہے۔ اسلئے ضعیفی اصلوں کا امکان صرف اس صورت میں ہے جبکہ یہ بعد کا تفاعل کامل مربع ہو۔ چنانچہ یہ معلوم ہو جاتا ہے کہ وہ کامل مربع ہے اور

$$ف (لا) = (لا^۲ - ۲لا - ۳)$$

$$۶ - ف (لا) = لا^۲ - ۸لا + ۲۲ لا^۲ - ۲۶ لا - ۱۸ = ۰$$

کی متوافق اور ضعیفی اصلیں معلوم کرو۔

$$جواب :- ف (لا) = (لا + ۱)(لا - ۲)(لا - ۳)$$

۷ - ذیل کی مساوات میں صرف دو مختلف اصلیں ہیں۔ انکو معلوم کرو۔

$$لا - ۱۳ لا + ۶۷ لا^۲ - ۱۷۱ لا + ۲۱۶ لا - ۱۰۸ = ۰$$

عموماً یہ ظاہر ہے کہ اگر ایک صحیح اصل ہے، دو مرتبہ واقع ہوتی ہو تو آخری سر میں ۲ جزو ضربی کے طور پر شامل ہونا چاہئے اور آخر سے دوسرے سر میں ۵۔ اگر اصل تین مرتبہ واقع ہوتی ہو تو آخری سر میں ۲، آخر سے دوسرے سر میں ۲، اور آخر سے تیسرے سر میں ۵ جزو ضربی کے طور پر شامل ہونا چاہئے۔ یہاں آخری سر = ۲ x ۳ - پس اگر نہ تو - ۱ اور نہ ۱ اصل ہو تو اصلیں ۲ اور ۳ ہونی چاہئیں۔ اسکی تصدیق آسانی کے ساتھ ہو سکتی ہے کہ یہ دونوں فی الحقیقت اصلیں ہیں۔

۸ - مساوات

$$لا^۲ - ۱۰ لا - ۳ = ۰$$

میں مساوی اصلیں ہیں ان کو معلوم کرو۔

اس مثال میں مقسوم علیہم کا طریقہ استعمال کرنے سے بیشتر اصلوں کو ان کے متکافیوں میں تبدیل کرنے سے آسانی پیدا ہوگی۔

$$جواب :- ف (لا) = (لا - ۱)(لا - ۵)(لا - ۳)$$

۱۰۷۔ نیوٹن کا تقرب کا طریقہ۔ یہ بتا دینے کے بعد کہ مساواتوں کی

متوافق اصلیں کس طرح معلوم کی جا سکتی ہیں اب ہم متباین اصلوں کی تقریبی قیمتیں حاصل کرنے کے بعض طریقے بیان کرتے ہیں۔ تقرب کا وہ طریقہ جو عام طور پر نیوٹن سے منسوب کیا جاتا ہے اور جو اس دفعہ کا موضوع ہے اس لحاظ سے قابل قدر ہے کہ اس کو باورانی تفاعلوں پر مشتمل (226) عددی مساواتوں میں اور ان مساواتوں میں جنہیں صرف جبری تفاعل شامل ہوتے ہیں یکساں طور پر استعمال کیا جاسکتا ہے۔ اگرچہ موخر الذکر جماعت کے تفاعلوں کی صورت میں عملی مقاصد کے مد نظر ہارنر کے طریقہ کو نیوٹن کے طریقہ پر ترجیح حاصل ہے تاہم اصول میں دونوں طریقے بڑی حد تک مماثل ہیں۔ ہارنر کا طریقہ جس کا حوالہ اوپر دیا گیا ہے دفعتاً آئندہ میں واضح کیا جائیگا۔

تقرب کے تمام طریقوں میں جس اصل کو ہم تلاش کرتے ہیں اسکی متعلق یہ فرض کر لیا جاتا ہے کہ وہ دوسری اصلوں سے جدا کر لی گئی ہے اور تنگ حدود کے درمیان معلومہ وقفہ کے اندر واقع ہے۔

فرض کرو کہ دی ہوئی مساوات  $f(x) = 0$  ہے اور قیمت  $x$  معلوم ہے جو مساوات کی ایک اصل سے بقدر ایک چھوٹی مقدار  $h$  کے فرق رکھتی ہے۔ اب چونکہ مساوات کی اصل  $x + h$  ہے اسلئے  $f(x + h) = 0$  یعنی

$$f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \dots = 0$$

اب چونکہ  $h$  چھوٹا ہے اسلئے  $h$  کی ایک سے بڑی تمام قوتوں کو نظر انداز کر دینے سے ہم حاصل کرتے ہیں

۱۔ دیکھو نوٹ (ب) کتاب کے آخری حصہ میں۔

$$ف(۱) + ف(۱) = ۵$$

جس سے

$$۵ = \frac{ف(۱)}{ف(۱)}$$

یعنی مطلوبہ اصل کی پہلی تقریبی قیمت ہے

$$۱ - \frac{ف(۱)}{ف(۱)}$$

اس قیمت کو ب سے تغییر کرو اور پھر وہی عمل جاری کرو تو قریب تر تقریبی قیمت

$$ب - \frac{ف(ب)}{ف(ب)}$$

حاصل ہوگی۔ اس عمل کو دہرانے سے صحت کے کسی درجہ تک تقریبی قیمت معلوم کیجا سکتی ہے۔

## مثال

مسادات لا<sup>۳</sup> - ۱۱۲ - ۵ = ۰ کی مثبت اصل کی تقریبی قیمت معلوم کرو۔

اصل ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہے (مثال دفعہ ۹۶)۔ حدود کو تنگ کرنے سے اصل کا ۲ اور ۲۵۲ کے درمیان واقع ہونا معلوم ہوتا ہے۔ ہم ۱۵ کو وہ مقدار لیتے ہیں جو ۱ سے تغییر کیجاتی ہے۔ یہ مقدار اصلی قیمت ۱ + ۵ سے ۱۵ سے زیادہ فرق نہیں رکھ سکتی۔ آسانی کے ساتھ ہم معلوم کرتے ہیں

$$\frac{ف(۱)}{ف(۱)} = \frac{ف(۲۵۱)}{ف(۲۵۱)} = \frac{۵۰۶۱}{۱۱۵۲۳} = ۰.۴۳۸۵۰۰$$

(227)

اسلے پہلا تقرب ہے

$$۲۶۱ - ۵۴۳ = ۰۶۰۰۹۴۶$$

اسکو ب قرار دینے سے اور کسر  $\frac{ف (ب)}{ب}$  کو محسوب کرنے سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$ب - \frac{ف (ب)}{ب} = ۲۶۰۹۴۵۵۱۴۸$$

جو دوسرا تقرب ہے۔ وٹس علی ہذا۔

نیوٹن کے طریقہ میں عام طور پر تقرب کی رفتار بہت تیز ہوتی ہے لیکن جس اصل کو ہم تلاش کر رہے ہیں اس کے ساتھ ہی جب دوسری اصل تقریباً اسلے

مساوی ہوتی ہے تو کسر  $\frac{ف (۱)}{ف (۱)}$  کا چھوٹا ہونا ضروری نہیں کیونکہ تقریباً مساوی

اصلوں میں سے کسی ایک کی قیمت 'ف (۱)' کو ایک چھوٹی مقدار میں تحول کر دیتی ہے۔ ایسی صورت میں خاص خاص پیش بینیوں کی ضرورت پڑتی ہے

اس طریقہ کی تفصیلی بحث میں ہم پڑنا نہیں چاہتے اس وجہ سے کہ عملی مقاصد کے لئے ہارنر کا طریقہ کہیں زیادہ مفید و کارآمد ہے جو اب بیان کیا جائیگا۔

۱۰۸۔ عددی مساواتوں کو حل کرنے کے لئے ہارنر کا طریقہ۔

اس طریقہ سے متوافق اور متباین دونوں اصلیں معلوم ہو سکتی ہیں۔ اس

اصل کو ہندسہ بہ ہندسہ دریافت کیا جاتا ہے، پہلے اصل کا صحیح حصہ

(اگر کوئی ہو) اور پھر اعشاری حصہ حاصل کرتے ہیں یہاں تک کہ اصل اگر متوافق

ہو تو پوری طرح اور اگر متباین ہو تو اعشاریہ کے مطلوبہ مقامات تک

معلوم ہو جائے۔ یہ عمل جذر المربع اور جذر المعکب نکالنے کے عمل کے

متشابه ہے جوئی الحقیقت موجودہ طریقہ سے دو درجہ اور کبھی مساواتوں کے

عام حل معلوم کرنے کی خاص صورتیں ہیں۔ ہارنر کے طریقہ کا خاص اصول یہ ہے کہ دی ہوئی مساوات کی



اصولوں کو دفعہ ۳۳ میں بیان کردہ طریقہ کی بموجب بقدر معلومہ مقدار کو متواتر گھٹایا جاتا ہے۔ اس طریقہ کا بڑا فائدہ یہ ہے کہ متواتر استحالات مختصر حسابی شکل میں پیش نظر ہو جاتے ہیں اور اصل ایک مسلسل عمل سے اشاریہ کے مطلوبہ مقامات تک صحیح صحیح حاصل ہو جاتی ہے۔

اصولوں کو گھٹانے کا اصول اس دفعہ میں سادہ مثالوں کے ذریعہ واضح کیا جائیگا اور دفعات آئندہ میں چند اور اصول بیان کئے جائیں گے جنکی مدد سے اس طریقہ کے عملی استعمال میں بہت کچھ سہولت پیدا ہو سکتی ہے۔

(221)

## مثالیں

۱۔ مساوات

$$۲۰۰ - ۸۵ - ۸۵ - ۸۵ - ۸۵ = ۸۵$$

کی مثبت اصلیں معلوم کرو۔

جب کوئی عددی مساوات حل کرنے کے لئے تجویز ہو تو پہلا کام یہ ہوگا کہ اصل کا پہلا عدد معلوم کیا جائے۔ چند آزمائشوں سے یہ عدد معلوم ہو سکتا ہے اگرچہ بعض صورتوں میں اصولوں کو جدا کرنے کے وہ طریقے استعمال کرنے ہونگے جو دسویں باب میں بیان کئے گئے ہیں۔ مثال بالائیں صرف ایک اصل مثبت ہو سکتی ہے اور یہ ۴۰ اور ۵۰ کے درمیان واقع ہے۔ پس اصل کا پہلا عدد ۴۰ ہے۔ اب ہم اصولوں کو بقدر ۴۰ کے گھٹاتے ہیں۔ احتمال شدہ مساوات کی ایک اصل صفر اور ۱۰ کے درمیان ہوگی۔ امتحان کرنے سے اس کا ۳ اور ۴ کے درمیان واقع ہونا معلوم ہوتا ہے۔ اب ہم احتمال شدہ مساوات کی اصولوں کو بقدر ۳ کے گھٹاتے ہیں جس کا اثر یہ ہوگا کہ مجوزہ مساوات کی اصلیں بقدر ۴۳ کے گھٹ جائیں گی۔ دوسری احتمال شدہ مساوات کی ایک اصل صفر اور ۱ کے درمیان ہوگی۔ اس آخری مساوات کی اصولوں کو بقدر ۵ کے گھٹانے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اسکی مطلق رقم صفر ہو جاتی ہے یعنی مجوزہ مساوات کی

اصولوں کو بقدر ۵، ۳، ۴ کے گھٹانے سے اسکی مطلق رقم منفر میں تحویل ہوتی ہے جس سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ دی ہوئی مساوات کی ایک اصل ۴۳۵ ہے۔ حسابی اعمال کا سلسلہ ذیل میں ظاہر کیا جاتا ہے :-

$$\begin{array}{r}
 ۲ \quad ۸۵ - \quad ۸۵ - \quad ۸۴ - \\
 ۸۰ \quad ۲۰۰ - \quad ۱۱۴۰ - \\
 ۵ - \quad ۲۸۵ - \quad ۱۱۴۸۴ - \\
 ۸۰ \quad ۳۰۰۰ \quad ۹۵۹۴ \\
 ۴۵ \quad ۲۴۱۵ \quad ۱۸۹۳ - \\
 ۸۰ \quad ۲۸۳ \quad ۱۸۹۳ \\
 ۱۵۵ \quad ۳۱۹۸ \quad ۰ \\
 ۶ \quad ۵۰۱ \quad \\
 ۱۶۱ \quad ۳۶۹۹ \quad \\
 ۶ \quad ۸۴ \quad \\
 ۱۶۴ \quad ۳۴۸۶ \quad \\
 ۶ \quad ۱۴۳ \quad \\
 ۱ \quad ۱۴۳ \quad
 \end{array}$$

شکستہ خطہر استحالہ کے اختتام کی علامت ہے اور جبلی ہندسوں میں لکھے ہوئے اعداد متواتر استحالہ شدہ ساداتوں کے سر ہیں (دیکھو دفعہ ۳۳)۔ مثلاً

$$۲ + ۱۵۵ + ۲۴۱۵ - ۱۱۴۸۴ = ۰$$

(229)

وہ مساوات ہے جسکی اعلیں دی ہوئی مساوات کی اصولوں سے بقدر ۴ کے چھوٹی ہیں اور جس کی مثبت اصل ۳ اور ۴ کے درمیان واقع ہوتی ہے۔ اگر روٹری استحالہ شدہ مساوات کی بالکل ٹھیک اصل ۵ نہ ہوتی بلکہ (فرض کرو) ۵ اور ۶ کے درمیان واقع ہوتی تو مجوزہ مساوات کی اصل کے پہلے تین ہند

۴۳۵۵ ہوتے اور چوتھا ہندسہ معلوم کر نیکے لئے اصلوں کو بقدر ۵ کے گھٹانا پڑتا اور علی ہذا القیاس۔

۲۔ مساوات

$$۴ - لا - ۳۱ لا - ۳۱ لا - ۲۴۵ = ۰$$

کی مثبت اصل معلوم کرو۔  
ہم پہلے حسابی عمل لکھ لیتے ہیں اور پھر اسکے متعلق کچھ بحث کریں گے۔

|   |      |        |         |       |
|---|------|--------|---------|-------|
| ۴ | ۱۳ - | ۳۱ -   | ۲۴۵ -   | ۶۵۲۵) |
|   | ۲۴   | ۶۶     | ۲۱۰     |       |
|   | ۱۱   | ۳۵     | ۶۵ -    |       |
|   | ۲۴   | ۲۱۰    | ۵۱۳۹۲   |       |
|   | ۳۵   | ۲۴۵    | ۱۳۶۰۸ - |       |
|   | ۲۴   | ۱۱۶۶   | ۱۳۶۰۸   |       |
|   | ۵۹   | ۲۵۶۹۶  | ۰       |       |
|   | ۵۸   | ۱۲۶۱۲  |         |       |
|   | ۵۹۶۸ | ۲۶۹۵۰۸ |         |       |
|   | ۵۸   | ۳۵۰۸   |         |       |
|   | ۶۰۶۶ | ۲۴۲۶۱۶ |         |       |
|   | ۵۸   |        |         |       |
|   | ۶۱۵۴ |        |         |       |
|   | ۶۲   |        |         |       |
|   | ۶۱۶۶ |        |         |       |

آپائنش سے ہمیں یہ معلوم ہوتا ہے کہ مجوزہ مساوات کی مثبت اصل ۶ اور ۷ کے درمیان واقع ہوتی ہے۔ اس لئے اصل کا پہلا ہندسہ ۶ ہے۔  
اصلوں کو بقدر ۶ کے گھٹاؤ، متعلقہ مساوات

$$لا + لا ۵۹ + لا ۲۴۵ - لا ۶۵ = ۰$$

کی اصل صفر اور ایک کے درمیان ہے۔ امتحان کرنے سے اس کا ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہونا معلوم ہو جاتا ہے۔ اس لئے مجوزہ مساوات کی اصل کے پہلے دو ہندسے ۶۷ ہیں۔ پھر اصولوں کو بقدر ۲ کے گھٹاؤ تو استحال شدہ مساوات کی اصل ۶۰۵ ہوگی۔ پس مجوزہ مساوات کی مطلوبہ اصل ۶۷۲۵ ہے۔

عمل میں ہولت و آسانی پیدا ہوگی اگر علامت اعشاریہ سے اجتناب کیا جائے چنانچہ اس بچنے کی ترکیب یہ ہے :- جب اصل کا اعشاریہ حصہ (فرض کرو... ج ب د) نمودار ہو تو متناظر استحال شدہ مساوات کی اصولوں کو ۱۰ سے ضرب دیدو یعنی پہلی انتصابی قطاریں جو عدد ہے اسکی دائیں جانب ایک صفر لگاؤ دوسری قطاریں جو عدد ہے اسکی دائیں جانب دو صفر تیسری قطاریں جو عدد ہے اسکی دائیں جانب تین صفر اور علیٰ ہذا القیاس اگر قطاریں تعداد میں زیادہ ہوں (اور یہ بات فی الواقع ہوگی جب دی ہوئی مساوات تیسرے درجہ سے بڑے درجہ کی ہو) اب استحال شدہ مساوات کی اصل... ج ب د کو نہیں بلکہ... ج ب د ہوگی۔ اصولوں کو بقدر ۱۰ کے گھٹاؤ تو استحال شدہ مساوات کی اصل... ج ب د ہوگی۔

پھر اس مساوات کی اصولوں کو ۱۰ سے ضرب دو تو اصل ہو جائیگی... ج ب د اور پھر وہی عمل جاری کرو۔ اس اصول کو واضح کر کے خاطر ہم اوپر کے حسابی عمل کو علامات اعشاریہ حذف کر کے دہراتے ہیں :- (280)

|                          |         |      |
|--------------------------|---------|------|
| ۴ - ۱۳ - ۳۱ - ۲۶۵ - ۶۷۲۵ | ۲۱۰     | ۲۱۰  |
| ۲۱۰                      | ۶۶      | ۲۲   |
| ۶۵۰۰۰ -                  | ۳۵      | ۱۱   |
| ۵۱۳۹۲                    | ۲۱۰     | ۲۲   |
| ۱۳۶۰۸۰۰۰ -               | ۲۲۵۰۰   | ۳۵   |
| ۱۳۶۰۸۰۰۰                 | ۱۱۹۶    | ۲۲   |
| ۰                        | ۲۵۶۹۶   | ۵۹۰  |
|                          | ۱۲۱۲    | ۵۹۸  |
|                          | ۲۶۹۰۸۰۰ | ۸    |
|                          | ۳۰۸۰۰   | ۶۰۶  |
|                          | ۲۷۲۱۶۰۰ | ۸    |
|                          |         | ۶۱۴۰ |
|                          |         | ۲۰   |
|                          |         | ۶۱۶۰ |

آئندہ تمام مثالوں میں یہ اختصار اختیار کیا جائیگا۔

۳۔ مساوات

$\cdot \pm 14) - 0 14) - 7 14) - 7 2.$

کی مثبت اصل معلوم کرو۔

اصل کا ۸ اور ۸ کے درمیان واقع ہونا آسانی کے ساتھ معلوم ہو جاتا ہے۔  
اس لئے اس کی شکل ہے .... ب ۱۰ ۷۔ اصلوں کو بقدر ۷ کے گھٹانے اور ۱۰ سے  
ضرب دینے سے حاصل ہونیوالی مساوات ہے

$$= 54 \dots - 81125 \dots + 8299 \dots + 82 \dots$$

اسکی مثبت اصل ..... ب، د ہے اور چونکہ یہ اصل صریحاً صفر اور ایک کے درمیان واقع ہوتی ہے اسلئے ۱ = . اور اسلئے اصل کے اعشاری حصہ میں ہم پہلا ہندسہ صفر لکھتے ہیں اور پھر دوسرے استحالہ کو عمل میں لانے سے پیشتر اصلوں کو ۱۰ ضرب دیتے ہیں۔ اس طور پر استحالہ شدہ مساوات کی اصل کا ۵ کے مساوی ہونا آسانی کے ساتھ معلوم کیا جاسکتا ہے۔

جواب :- ۵ - ۴ = ۱

کے ساتھ معلوم کیا جاسکتا ہے۔ جواب :- ۵۔ ۷ کے  
ادب کی مثالوں میں اصل بہت جلد ختم ہو گئی ہے یعنی صرف تین ہندسوں کے  
بعد۔ لیکن جب عمل حساب طول طویل ہو اور متواتر آئینوالے ہندسوں کو اندراج کے  
ذریعہ معلوم کرنا ضروری ہو تو یہ کام بہت محنت طلب ہو جائیگا۔ اس محنت سے تھوڑی  
بہت نجات المی سکتی ہے جیسا کہ دفعہ آئندہ سے ظاہر ہوگا۔ ہارنر کے طریقہ کے اہم ترین  
عملی فائدوں میں سے ایک فائدہ یہ ہے کہ اصل کے دوسرے یا تیسرے (بعض اوقات  
صرف پہلے) ہندسہ کے بعد خود استحالہ شدہ مساوات سے صرف آزمائش کے ذریعہ بعد کے  
ہندسہ کا علم ہو جاتا ہے۔ اس اصول کو اب واضح کیا جائیگا۔

(231) ۹۔ آزمائشی مقسوم علیہ کا اصول۔ دفعہ ۷۰ میں ہم نے

یہ دیکھا ہے کہ جب کسی مساوات کو لا کی بجائے  $1 + h$  درج کر کے  
 مستحیل کیا جاتا ہے جہاں  $h$  ایسا عدد ہے جو صحیح اصل سے بقدر  $h$   
 کے (جو بلحاظ  $h$  کے چھوٹا ہے) فرق رکھتا ہے تو  $h$  کی تقریبی قیمت

ف (۱) کو ف (۱) سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔ اب ہارنر کے طریقہ میں متواتر آتیوالی استعمال شدہ مساواتیں اس قسم کے استعمالوں کا نتیجہ ہوتی ہیں جنہیں آخری سرف (۱) اور آخر سے دوسرا سرف (۱) ہوتا ہے (دیکھو دفعہ ۳۳)۔ پس عمل کی دو یا تین منزلیں طے ہونیکے بعد جس اصل کا باقی حصہ معلوم شدہ حصہ کے ساتھ چھوٹی نسبت رکھے تو آخری استعمال شدہ مساوات کے آخری سرف کو آخر سے دوسرے سرف سے تقسیم کرنے سے اصل کے مزید دو یا تین ہندسے صحیح طور پر حاصل ہونے کی ہم امید کر سکتے ہیں۔ اس لئے اگر ہم چاہیں تو ہارنر کے طریقہ میں عمل کے کسی منزل پر اصل کا مزید تقرب حاصل کرنے کی خاطر نیوٹن کا طریقہ استعمال کر سکتے ہیں۔ ہارنر کے طریقہ میں یہ اصول اس وقت استعمال کیا جاتا ہے جب اصل کے معلوم شدہ ہندسوں کے بعد آنے والے ہندسہ کا پتہ لگانا مقصود ہو۔ ہر استعمال شدہ مساوات کے آخر سے دوسرے سرف کو ہم آزمائشی مقسوم علیہ کے نام سے موسوم کریں گے۔ مثلاً دفعہ مابقی کی دوسری مثال میں عدد ۵ کا پتہ آزمائشی مقسوم علیہ ۲۶۹۰۸۰۰ سے صحیح طور پر لگ جاتا ہے۔ اس مثال میں پہلی استعمال شدہ مساوات کے آزمائشی مقسوم علیہ سے اصل کا دوسرا ہندسہ بھی ٹھیک طور پر معلوم ہو جاتا ہے اگرچہ بالعموم ایسا نہیں ہوتا۔ طالب علم کو استعمال شدہ مساوات کے صدر (Leading) سروں کے ممکن اثر کا اندازہ لگانا ہوگا۔ لیکن یہ معلوم ہوگا کہ ان رقموں کا اثر کم سے کم تر ہوتا جائیگا جیسے جیسے اصل کے ہندسے یکے بعد دیگرے حاصل ہوتے جائیں گے۔

مثالیں

۱۔ مساوات  $لا + لا + لا = ۱۰۰$

کی مثبت اصل اعشاریہ کے چار مقامات تک معلوم کرو۔  
یہ آسانی کے ساتھ معلوم ہو جاتا ہے کہ اصل ۴ اور ۵ کے درمیان واقع ہوتی ہے۔ ہم عمل حساب لکھ لیتے ہیں اور پھر اس پر تنقید کریں گے:-

|            |            |         |        |       |
|------------|------------|---------|--------|-------|
| (۴۶۲۶۴۴)   | ۱۰۰-<br>۸۴ | ۱<br>۲۰ | ۱<br>۲ | (282) |
| ۱۶۰۰۰۰     | ۲۱         | ۵       |        |       |
| ۱۱۹۲۸      | ۳۶         | ۲       |        |       |
| ۴۰۶۲۰۰۰-   | ۵۶۰۰       | ۹       |        |       |
| ۳۶۸۸۳۶۶    | ۲۶۴        | ۲       |        |       |
| ۲۸۳۶۲۴۰۰۰- | ۵۹۶۲       | ۱۳۰     |        |       |
| ۲۵۶۰۶۱۶۴۴  | ۲۶۸        | ۲       |        |       |
| ۲۶۵۵۲۲۵۶   | ۶۲۳۲۰۰     | ۱۳۲     |        |       |
|            | ۸۱۹۶       | ۲       |        |       |
|            | ۶۳۱۳۹۶     | ۱۳۴     |        |       |
|            | ۸۲۳۲       | ۲       |        |       |
|            | ۶۳۹۶۲۸۰۰   | ۱۳۶۰    |        |       |
|            | ۵۵۱۳۶      | ۶       |        |       |
|            | ۶۴۰۱۶۹۳۶   | ۱۳۶۶    |        |       |
|            | ۵۵۱۵۲      | ۶       |        |       |
|            | ۶۴۰۶۳۰۸۸   | ۱۳۶۲    |        |       |
|            |            | ۶       |        |       |
|            |            | ۱۳۶۸۰   |        |       |
|            |            | ۲       |        |       |
|            |            | ۱۳۶۸۲   |        |       |
|            |            | ۲       |        |       |
|            |            | ۱۳۶۸۸   |        |       |
|            |            | ۲       |        |       |
|            |            | ۱۳۶۹۲   |        |       |

پہلے اصلوں کو بقدر ۴ کے گھٹاؤ۔ اب چونکہ اعشاری حصہ ظاہر ہونے کو ہے

اس لئے استعمال شدہ مساوات کے سروں کو دفعہ ۸-۱۰ میں بتلائے ہوئے طریقہ کی بموجب صفر لگاؤ۔ سہ ۱۳۰۰۰۰۰۰۰ کے مقابلہ میں چھوٹا ہے اس لئے ہم یہ امید کر سکتے ہیں کہ آزمائشی مقسوم علیہ سے اہل کے دوسرے ہندسہ کا پتہ مل سکتا ہے۔ اس بات کا خیال رہے کہ ہر صورت میں جس ہندسہ کو اصل کے حصہ کے طور پر ہم اختیار کر رہے ہونگے وہ ایسا بڑے سے بڑا عدد ہونا چاہیئے جو استعمالہ کئے عمل میں مطلق رقم کی علامت کو تبدیل نہیں کرتا۔ یہاں ایسا عدد ۲ ہے۔ استعمال شدہ مساوات

$$+۱۳۰۰۰۰۰۰۰۰ + ۵۰۰۰۰۰۰ - ۱۶۰۰۰ =$$

کی اصلوں کو بقدر ۲ کے گھٹانے میں مطلق رقم اپنی علامت برقرار رکھتی ہے (۲-۴) اگر ہم ہندسہ ۳ کو اختیار کرتے تو مطلق رقم مثبت ہو جاتی جو اس بات کی علامت ہے کہ ہم اصل سے آگے ہو گئے ہیں۔ ہمیں اس بات کی احتیاط کرنی چاہئے کہ پہلے استعمالہ کے بعد اس تید کا سبب مثال آئندہ میں نظر آئیگا) مطلق رقم پورے عمل میں اپنی علامت برقرار رکھے۔ اگر ہم نے سہواً بہت چھوٹا ہندسہ اختیار کیا ہے تو خطا خود طے ہو جائیگی جیسا کہ معمولی تقسیم یا جذر نکالنے کے عمل میں ہوا کرتا ہے کیونکہ ایسی صورت میں اس کے بعد آئینوالا ہندسہ ۹ سے بڑا ہوگا۔ ایسی غلطی ہونی کا احتمال بالعموم بہت کم ہے۔ لیکن ایسی خطا کثرت سے واقع ہوتی ہے جو ضرورت سے بڑے ہندسہ کے لینے میں سرزد ہوتی ہے اور اس خطا کا پتہ مطلق رقم کی علامت بد لجانے سے چل جائیگا۔ اوپر کے عمل حساب میں پانچویں استعمالہ کو کام میں لائے بغیر یہ معلوم ہو جاتا ہے کہ حل کا پانچواں ہندسہ ۴ ہے چنانچہ مطلوبہ اصل اعشاریہ کے چار صحیح مقامات تک ۴۱۲۶۴۴ ہے۔

۲۔ مساوات

$$+۱۳۰۰۰۰۰۰۰۰ - ۱۳۰۰۰۰۰۰ - ۱۱۰۰۰۰۰ =$$



کی ایک اصل ۱ اور ۲ کے درمیان ہے۔ اسکی قیمت اعشاریہ کے چار مقامات تک معلوم کرو۔

|               |             |          |    |       |   |
|---------------|-------------|----------|----|-------|---|
| ۱۶۹۳۹۹)       | ۴           | ۱۱-      | ۲- | ۴     | ۱ |
| ۱- -          | ۱- -        | ۱        | ۵  | ۱     |   |
| ۹۰۰۰۰-        | ۱۰۰-        | ۱        | ۱  | ۵     |   |
| ۵۰۹۷۶         | ۷           | ۶        | ۶  | ۱     |   |
| ۹۰۲۲۰۰۰۰-     | ۳۰۰۰-       | ۷        | ۷  | ۶     |   |
| ۷۲۶۹۰۵۶۱      | ۱۱۲۹۶       | ۷        | ۷  | ۱     |   |
| ۱۷۵۴۹۴۳۹۰۰۰۰- | ۸۸۹۶        | ۱۲۰۰     |    | ۷     |   |
| ۱۵۲۱۳۱۰۵۲۰۱۶  | ۱۲۸۰۸       | ۵۱۶      |    | ۱     |   |
| ۲۳۳۶۳۳۳۷۹۸۴-  | ۲۳۳۰۲۰۰۰    | ۱۹۱۶     |    | ۸۰    |   |
|               | ۹۲۶۱۸۷      | ۵۵۲      |    | ۶     |   |
|               | ۲۲۲۳۰۱۸۷    | ۲۲۶۸     |    | ۸۶    |   |
|               | ۹۳۵۶۰۱      | ۵۸۸      |    | ۶     |   |
|               | ۲۵۱۶۵۷۸۸۰۰۰ | ۲۰۵۶۰۰   |    | ۹۲    |   |
|               | ۱۸۹۳۸۷۲۳۶   | ۳۱۲۹     |    | ۶     |   |
|               | ۲۵۲۵۵۱۷۵۲۳۶ | ۲۰۸۷۹    |    | ۹۸    |   |
|               | ۱۸۹۷۶۶۲۸۸   | ۲۱۲۸     |    | ۶     |   |
|               | ۲۵۵۲۴۹۴۱۸۲۴ | ۲۱۸۶۷    |    | ۱۰۴۰  |   |
|               |             | ۲۱۲۷     |    | ۲     |   |
|               |             | ۲۱۵۰۱۴۰۰ |    | ۱۰۴۲  |   |
|               |             | ۶۲۱۵۶    |    | ۲     |   |
|               |             | ۲۱۵۶۲۵۵۶ |    | ۱۰۴۶  |   |
|               |             | ۶۲۱۹۲    |    | ۲     |   |
|               |             | ۲۱۶۷۷۷۸  |    | ۱۰۴۹  |   |
|               |             | ۶۲۲۲۸    |    | ۲     |   |
|               |             | ۲۱۶۹۰۹۷۶ |    | ۱۰۵۲۰ |   |
|               |             |          |    | ۶     |   |
|               |             |          |    | ۱۰۵۲۶ |   |
|               |             |          |    | ۶     |   |
|               |             |          |    | ۱۰۵۳۲ |   |
|               |             |          |    | ۶     |   |
|               |             |          |    | ۱۰۵۳۸ |   |
|               |             |          |    | ۶     |   |
|               |             |          |    | ۱۰۵۴۴ |   |

(234)

پانچویں استحالہ کی تکمیل کے بغیر ہم یہ دیکھتے ہیں کہ اصل کا پانچواں ہندسہ ۹ ہے۔ اس لئے اعشاریہ کے چار صحیح مقامات تک اصل کی قیمت ہے ۱۵۶۳۶۹۔ دوسرے استحالہ کے بعد سے آزمائشی مقسوم علیہ موثر ہو جاتا ہے چنانچہ اس سے عدد ۳ ٹھیک طور پر معلوم ہوتا ہے اور پھر اصل کے دیگر ہندسے بھی یہی اتھلا شدہ مساوات کی آخری دو درجیں منفی ہیں۔ اس لئے ہم اس بات کی امید کر سکتے ہیں کہ آزمائشی مقسوم علیہ سے قبل کے سروں کا اثر آزمائشی مقسوم کی یہ نسبت زیادہ ہونا چاہئے جیسا کہ اس صورت میں یہ امر واقعہ ہے۔ ہندسہ ۶ جو اصل کا دوسرا ہندسہ ہے اندراج کے ذریعہ معلوم کرنا چاہئے۔ ہمیں اس بات کی تعین کرنی ہوگی کہ مساوات

$$۸۰۰۰۰ + ۱۴۰۰۰ - ۳۰۰۰ - ۶۰۰۰۰ = ۰$$

کی اصل کا صفر اور ۱۰ کے درمیان محل وقوع کیا ہے۔ چند آزمائشوں سے معلوم ہو جائیگا کہ ۶ سے منفی نتیجہ حاصل ہوتا ہے اور ۷ سے مثبت۔ پس اصل ۶ اور ۷ کے درمیان واقع ہے اور ۶ وہ ہندسہ ہے جس کی ہمیں جستجو ہے۔ اس کے بعد کے ہندسوں کے لئے ہم وہ بڑے سے بڑے ہندسے ۳، ۶، ۹ لیتے ہیں جو مطلق رقم کی منفی علامت کو تبدیل نہیں کرتے۔ پہلے استحالہ میں اصلوں کو بقدر ایک کے گھٹانے میں مطلق رقم کی علامت بدلتی ہے جس کے یہ معنی ہیں کہ ہم صفر اور ایک کے درمیان والی اصل سے گزر چکے ہیں کیونکہ صفر سے مثبت نتیجہ حاصل ہوتا ہے اور ایک سے منفی نتیجہ۔ اب باقی تمام استحالوں میں جب تک کہ ہم اصل کے نیچے رہتے ہیں مطلق رقم کی علامت وہی ہونی چاہئے جو ایک کے اندراج سے حاصل ہوتی ہے اور یہ فی الحقیقت اس بات کا فرض کر لینا ہے کہ کوئی اصل ایک اور اس ہندسہ کے درمیان واقع نہیں ہوتی جس کی ہمیں تلاش ہے۔ یہ مفروضہ سوال کی عبارت سے ہی ظاہر ہے۔ واقعہ یہ ہے کہ مجوزہ مساوات کی دو اصلیں مثبت ہیں۔ ان میں سے ایک اصل صفر اور ایک کے درمیان واقع ہے اور اسلئے صرف ایک ۱ اور ۲ کے درمیان ہوگی۔



اس طور پر جو خارج قسمت حاصل ہوتا ہے وہ اصلی خارج قسمت سے صرف آخری ہندسہ میں یا زیادہ سے زیادہ آخری دو ہندسوں میں فرق رکھینگا۔ ہارنر کے اجمالی عمل میں بھی یہی اصول ہے۔ ہم صرف وہ ہندسے برقرار رکھتے ہیں جو نتیجہ کو تقریب کے مطلوبہ درجہ تک حاصل کرنے میں موثر ہوں۔ جب اجمالی عمل شروع ہوتا ہے تو استعمال شدہ مسادات کے متواتر سروں کو قبل الذکر طریقہ پر صفہ لگانے کی بجائے ہم آخر سے دوسرے سر کے سیدھی طرف والے ایک ہندسہ کو آخر سے تیسرے سر کے سیدھی طرف والے دو ہندسوں کو آخری سے چوتھے سر کے سیدھی طرف والے تین ہندسوں وغیرہ کو کات دیتے ہیں۔ اس کا اثر یہ ہوگا کہ عمل میں اہم ہندسے اپنی جہاں خاص جگہ پر قائم رہیں گے اور غیر اہم ہندسے کلاً خارج ہو جائیں گے۔

طالب علم کے لئے بہتر یہ ہوگا کہ وہ ذیل کی مثالوں میں پہلی مثال میں اجمالی طریقہ سے حاصل کئے ہوئے پہلے استعمال کا مقابلہ اس متناظر استعمال کے ساتھ کرے جو دقیقہ اسبق کی دوسری مثال میں مکمل طور پر حاصل کیا گیا ہے۔ تب اسکو معلوم ہو جائیگا کہ کس طرح صدر ہند سے (یعنی وہ ہندسے جو نتیجہ کے حاصل کرنے میں اہم ترین حصہ لیتے ہیں) دونوں صورتوں میں منطبق ہوئے ہیں اور اپنے اضافی مقامات برقرار رکھتے ہیں حالانکہ غیر اہم ہندسے کلاً خارج ہو جاتے ہیں۔

اس مختصار کے علاوہ جو اوپر بیان ہوا ہارنر کے عمل کے دیگر اختصا روں کی بھی بعض اوقات سفارش کی جاتی ہے لیکن ہم انکا ذکر کرنا اس وجہ سے ضروری نہیں سمجھتے کہ ان سے بہت کم فائدہ حاصل ہوتا ہے اور نیز غلطی کے احتمالات بڑھ جاتے ہیں۔ متذکرہ بالا اختصار ہارنر کے طریقہ تقریب میں استعداد اہم تھا کہ اس طریقہ کا ذکر بغیر اس کو بیان کئے ہوئے غیر مکمل رہ جاتا۔

## مثالیں

۱۔ دفعہ ماضی کی مثال ۲ میں جو مساوات درج ہے اس کی وہ اصل اعشاریہ کے سات یا آٹھ مقامات تک معلوم کر دو جو ۱ اور ۲ کے درمیان ہے۔ اس مثال کے نتیجہ کو تسلیم کر کے ہم اجالی عمل تیسرے استعمال کی تعمیل کے بعد سے شروع کریں گے چنانچہ اس استعمال کے بعد کا عمل ذیل میں درج ہے :-

$$\begin{array}{r}
 ۱۶۶۳۶۹۱۳۵۷۵ \\
 ۱۵۲۱۳۰۹۰ \\
 ۲۳۳۶۳۳۹- \\
 ۲۳۰۱۵۹۷ \\
 ۳۴۷۵۲- \\
 ۲۵۶۰۱ \\
 ۹۱۵۱- \\
 ۷۶۸۰ \\
 ۱۴۷۱- \\
 ۱۲۸۰ \\
 ۱۹۱- \\
 ۱۷۹ \\
 \hline
 ۱۲
 \end{array}$$

یہاں ہندسوں کو کاٹ دینے کے پہلے عمل سے یعنی آخر سے دوسرے سر سے ۸، آخر سے تیسرے سر سے ۱۳، آخر سے چوتھے سر سے ۵۲ کو خارج کر دینے سے چار درجہ کا پہلا سر صرف ایک رہ جاتا ہے۔ اب ہم اصلوں کو بقدر ۶ کے گھساتے ہیں گویا کہ سر ۱، ۳۱۵۰، ۲۵۱۶۵۷۸، ۱۷۵۲۹۳۳۹- جو باقی رہ جاتے ہیں انہی مساوات کے سر ہیں۔ اصل کے ایسے ہندسہ سے

ضرب دینے میں منقطع ہندسوں کو ذہن میں ضرب دے لینا چاہئے تاکہ حاصل کے ہندسہ کو حساب میں شامل کیا جاسکے جیسا کہ مختصر تقسیم میں کیا جاتا ہے۔

جب اصلوں کو بقدر ۶ کے گٹانے کا عمل مکمل ہو جائے تو استحالہ شدہ کئی میں پھر ہم آخر سے دوسرے سر سے ، آخر سے تیسرے سر سے ۶۸ ، قطع کرتے ہیں اور پہلا سر بالکل غائب ہو جاتا ہے۔ عمل پھر اس طور پر جاری رہتا ہے گویا صرف دو درجی کے سروں ۳۱، ۲۵۵، ۲۲۸، ۲۹، ۶۳، ۳۲، ۲۳ سے واسطہ ہے۔ ہندسوں کو پھر قطع کرنے کے عمل کا اثر یہ ہوگا کہ سرا ۳۱ بالکل خارج ہو جائیگا۔ بعد کا عمل اجمالی تقسیم کے عمل کے مماثل ہو جاتا ہے۔ جب عمل ختم ہو جاتا ہے تو خارج قسمت میں اعشاری ہندسوں کی تعداد آخر کے دو یا تین ہندسوں تک صحیح خیال کیجا سکتی ہے اجمالی عمل شروع کرنے سے پیشتر اصل کو جس حد تک معلوم کرنا پڑتا ہے وہ اعشاریہ کے مطلوبہ مقامات کی تعداد پر منحصر ہوتی ہے کیونکہ اجمالی عمل شروع ہو جانے کے بعد معلومہ ہندسوں کے علاوہ ہمیں ہندسوں کی اتنی تعداد جو آرائشی مقسوم علیہ کے ہندسوں کی تعداد سے بقدر ایک کے کم ہے حاصل ہوگی۔

۲۔ مسادات

$$۲ - ۱۲ + ۷ = ۰$$

کی وہ اصل جو ۲ اور ۳ کے درمیان ہے اعشاریہ کے سات یا آٹھ مقامات تک معلوم کرو۔

(237)

اس مسادات کی صرف دو مثبت اصلیں ہو سکتی ہیں، ایک اصل صفر اور ایک کے درمیان واقع ہوتی ہے اور دوسری ۲ اور ۳ کے درمیان۔ دو سری کو معلوم کرنے کے لئے ہم

ذیل کا عمل کرتے ہیں :-

|              |          |        |     |   |
|--------------|----------|--------|-----|---|
| ۲۶-۴۶۲۵۵۶۴۱) | ۷        | ۱۲-    | ۰   | ۰ |
| ۸-           | ۸        | ۴      | ۲   |   |
| ۱۰۰۰۰۰۰۰۰-   | ۲-       | ۲      | ۲   |   |
| ۸۳۸۹۱۲۵۶     | ۲۴       | ۸      | ۲   |   |
| ۱۶۱۰۸۵۴۴-    | ۲۰۰۰۰۰۰۰ | ۱۲     | ۴   |   |
| ۱۵۴۹۳۴۰۱     | ۹۶۲۸۶۴   | ۱۲     | ۲   |   |
| ۶۱۵۱۴۴-      | ۲۰۹۶۲۸۶۴ | ۲۴۰۰۰۰ | ۶   |   |
| ۴۴۶۲۶۶       | ۹۸۵۶۹۶   | ۳۲۱۶   | ۲   |   |
| ۱۶۸۸۸۱-      | ۲۱۹۵۸۶۵۶ | ۲۴۳۲۱۶ | ۸۰۰ |   |
| ۱۵۶۲۲۶       | ۱۶۴۶۸    | ۳۲۳۲   | ۴   |   |
| ۱۲۶۵۵-       | ۲۲۱۳۳۲۳  | ۲۴۶۴۴۸ | ۸۰۲ |   |
| ۱۱۱۵۹        | ۱۶۴۶۸    | ۳۲۳۸   | ۴   |   |
| ۱۴۹۶-        | ۲۲۳۰۸۲۴  | ۲۴۹۶۹۶ | ۸۰۸ |   |
| ۱۳۳۸         | ۴۹       | ۲۴۹۶   | ۴   |   |
| ۱۵۸-         | ۲۲۳۱۳۱   |        | ۸۱۲ |   |
| ۱۵۶          | ۴۹       |        | ۴   |   |
| ۲            | ۲۲۳۱۸۰   | ۲۴     | ۸۴۶ |   |

یہاں اصولوں کو بقدر ۲ کے گھٹانے کے بعد اور استحال شدہ مساوات کی  
 اصولوں کو ۱۰ سے ضرب دینے سے ہم یہ دیکھتے ہیں کہ آزمائشی مقسوم علیہ  
 ۲۰۰۰۰ مطلق رقم ۱۰۰۰۰ کو تقسیم نہیں کر سکتا۔ اس لئے ہم خارج قسمت  
 میں صفر رکھتے ہیں اور پھر اصولوں کو ۱۰ سے ضرب دیتے ہیں۔ باقی کا عمل  
 حسب سابق کیا گیا ہے۔

۳۔ اسی مساوات کی وہ اصل معلوم کرو جو صفر اور ایک کے درمیان  
 واقع ہے۔





ہو جائیگی۔ دونوں اصولوں کو جدا کرنے کے بعد عمل حساب ہر ایک کے لئے جداگانہ طور پر وفعات باسبق کی مثالوں کی طرح کیا جاتا ہے۔ دفعہ ۱۰۹ میں آزمائشی مقسوم علیہ کی جو تشریح کی گئی ہے اس سے یہ ظاہر ہے کہ زیر بحث صورت میں بیون کا طریقہ جس سبب سے ناکام رہتا ہے (دفعہ ۱۰۷) اسی سبب سے آزمائشی مقسوم علیہ اس وقت تک موثر نہیں ہوگا جب تک کہ اصولوں کو جدا کرنے کے بعد پہلی یا دوسری منزل کی تکمیل نہ ہو جائے۔

## مثالیں

۱۔ مساوات

$$لا^۳ - ۷ لا + ۷ = ۰$$

کی دو اصلیں ۱ اور ۲ کے درمیان ہیں (دیکھو مثال ۲ دفعہ ۹۶)۔ ہر ایک اصل اعشاریہ کے ۸ مقامات تک معلوم کرو۔

اصولوں کو بقدر ۱ کے گھٹانے سے استحالہ شدہ مساوات (ان اصولوں کو

۱۰ سے ضرب دینے کے بعد) یعنی

$$لا^۳ + ۳۰ لا - ۴۰۰ = ۱۰۰۰$$

کی دو اصلیں صفر اور ۱۰ کے درمیان ہونی چاہئیں۔ ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ یہ اصلیں واقع ہوتی ہیں ایک تو ۳ اور ۴ کے درمیان اور دوسری ۶ اور ۷ کے درمیان۔ اب اصلیں جدا ہو جاتی ہیں اور ہم ہر ایک کے دریافت کر لیں وہی عمل اختیار کرتے ہیں جو پہلے بیان ہو چکا ہے۔ اگر اس منزل پر اصلیں جدا نہ ہوتیں تو ہم وہ صدر ہند سے معلوم کرتے جو دونوں میں مشترک ہوتا اور پھر اصولوں کو بقدر اس ہندسہ کے گھٹانے کے بعد یہ دیکھتے کہ استحالہ شدہ مساوات کئی اصلیں کن وقفوں کے درمیان واقع ہوتی ہیں اور علیٰ ہذا القیاس

جواب :- ۱۵۳۵۶۸۹۵۸۴ - ۱۵۶۹۲۰۲۱۴

۲۔ مساوات

$$لا^۳ - ۴۹ لا + ۶۵۸ لا - ۱۳۷۹ = ۰$$

کی وہ دو اصلیں معلوم کرو جو ۲۰ اور ۳۰ کے درمیان واقع ہیں -  
 ان میں سے چھوٹی اصل کے لئے تقرب کا مکمل عمل اعشاریہ کے مقامات تک بتایا جائیگا اور پھر چند مشاہدات کئے جائیں گے تاکہ طالب علم کو اس قسم کی تمام صورتوں میں مدد مل سکے -

(239)

|     |     |       |          |          |       |
|-----|-----|-------|----------|----------|-------|
| ۲۳۰ | ۲۱۳ | ۱۲۶۴۷ | ۱۳۷۹-    | ۶۵۸      | ۲۹-   |
|     |     |       | ۱۵۶۰     | ۵۸۰-     | ۲۰    |
|     |     |       | ۱۸۱      | ۷۸       | ۲۹-   |
|     |     |       | ۱۸۰-     | ۱۸۰-     | ۲۰    |
|     |     |       | ۱۰۰۰     | ۱۰۲-     | ۹-    |
|     |     |       | ۹۹۲-     | ۲۲       | ۲۰    |
|     |     |       | ۸۰۰۰     | ۶۰-      | ۱۱    |
|     |     |       | ۶۷۳۹-    | ۵۱       | ۳     |
|     |     |       | ۱۲۶۱۰۰۰  | ۹۰۰-     | ۱۲    |
|     |     |       | ۱۲۱۷۲۰۲- | ۲۰۲      | ۳     |
|     |     |       | ۲۳۵۹۷    | ۲۹۶-     | ۱۷    |
|     |     |       | ۳۲۱۸۳-   | ۲۰۸      | ۳     |
|     |     |       | ۹۲۱۲     | ۸۸۰۰۰-   | ۲۰۰   |
|     |     |       | ۶۷۸۶-    | ۲۰۶۱     | ۲     |
|     |     |       | ۲۶۲۸     | ۶۷۳۹-    | ۲۰۲   |
|     |     |       | ۲۳۷۲     | ۲۰۶۲     | ۲     |
|     |     |       | ۲۵۶      | ۲۹۷۷۰۰۰- | ۲۰۲   |
|     |     |       | ۲۳۶-     | ۶۱۸۹۹    | ۲     |
|     |     |       | ۲۰       | ۲۰۵۸۰۱-  | ۲۰۶۰  |
|     |     |       |          | ۶۱۹۰۸    | ۱     |
|     |     |       |          | ۳۳۳۸۹۳-  | ۲۰۶۱  |
|     |     |       |          | ۲۰۶      | ۱     |
|     |     |       |          | ۳۳۱۸۳-   | ۲۰۶۲  |
|     |     |       |          | ۲۰۶      | ۱     |
|     |     |       |          | ۳۳۹۷۷۰۲۶ | ۲۰۶۳۰ |
|     |     |       |          | ۲        | ۳     |
|     |     |       |          | ۳۳۹۳-    | ۲۰۶۳۳ |
|     |     |       |          | ۲        | ۳     |
|     |     |       |          | ۳۳۸۹-۶   | ۲۰۶۳۶ |
|     |     |       |          |          | ۳     |
|     |     |       |          |          | ۲۰۶۳۹ |

اصول کو بقدر ۲۰ کے گھٹانے سے مطلق رقم کی علامت بدل جاتی ہے  
یہ اس بات کی علامت ہے کہ ایک اصل صفر اور ۲۰ کے درمیان واقع  
ہے جس سے فی الحال ہمیں کوئی تعلق نہیں۔ پہلی استحالہ شدہ مساوات  
$$لا + لا - لا - لا + لا + لا = ۱۸۱$$

کی اصلیں تاہم جدا نہیں ہوئیں کیونکہ دونوں ۳ اور ۴ کے درمیان واقع  
ہوتی ہیں۔ ان دونوں عددوں کے اندراج سے مثبت نتیجہ حاصل ہوتا  
ہے اور اس لئے یہاں ہمیں وہ معیار نہیں ملتا جو پہلی مثالوں میں مخصوص  
ہندسہ کی تلاش کرنے میں مدد دینے کے لئے حاصل ہوا تھا یعنی مطلق رقم  
میں علامت کی تبدیلی نہیں ملتی۔ تاہم ایک دوسرا معیار ایسا ہے جس  
سے اندراج کے ذریعہ وہ وقفہ معلوم ہو سکتا ہے جس کے اندر یہ دونوں  
اصلیں واقع ہوتی ہیں۔ اگر ہم  $لا + لا - لا - لا + لا + لا = ۱۸۱$  کی

(240)

اصول کو بقدر ۴ کے گھٹائیں تو استحالہ شدہ مساوات  $لا + لا - لا + لا + لا + لا = ۱۸۱$   
میں علامت کی کوئی تبدیلی ظہور پذیر نہیں ہوتی۔ پس یہ دونوں اصلیں منفر  
اور ۴ کے درمیان واقع ہوتی چاہئیں۔ اگر ہم اس کی اصول کو بقدر ۳  
کے گھٹائیں تو استحالہ شدہ مساوات میں (جیسا کہ اوپر کے عمل سے ظاہر ہے)  
علامت کی تبدیلیوں کی تعداد وہی ہے جو خود مساوات میں علامت کی  
تبدیلیوں کی ہے۔ پس یہ دونوں اصلیں ۳ اور ۴ کے درمیان واقع  
ہوتی ہیں۔ اس لئے وہ اب تک جدا نہیں ہوئیں اور ہم اصول کو بقدر  
۳ کے گھٹاتے ہیں۔ دوسری استحالہ شدہ مساوات

$$لا + لا - لا - لا + لا + لا = ۱۰۰۰$$

میں اسی طرح دونوں اصولوں کا ۴ اور ۳ کے درمیان واقع ہونا معلوم ہوتا  
ہے کیونکہ بقدر ۲ کے گھٹانے سے استحالہ شدہ مساوات کے سرور میں علامت  
کی دو تبدیلیاں رہتی ہیں (دیکھو عمل بالا) اور بقدر ۳ کے گھٹانے سے تمام  
علامتیں مثبت حاصل ہوتی ہیں۔ چنانچہ اس حد تک دونوں اصلیں اپنے  
پہلے تین ہندسوں تک مائل ہیں یعنی ۲۲۶۲ تک۔ پھر ہم بقدر ۲ کے گھٹاتے ہیں تو

استعمال شدہ مساوات  $لا^۳ + ۲۰۰۰ لا^۲ - ۸۸۰۰ لا + ۱۲۶۱ = ۰$  کی صرف ایک اصل ۱ اور ۲ کے درمیان واقع ہوتی ہے کیونکہ اسے مثبت اور ۲ سے منفی نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔ اس کی دوسری اصل ۲ اور ۳ کے درمیان ہے کیونکہ ۳ سے مثبت نتیجہ ملتا ہے۔ اب اصلیں جدا ہو گئیں۔ ہم عمل بالائیں چھوٹی اصل کا تقرب اس مساوات کو بقدر ۱ کے گھٹانے سے حاصل کرتے ہیں۔ آزمائشی مقسوم علیہ دوسری منزل سے موثر ہو جاتے۔ بڑی اصل کا تقرب حاصل کرنا ہو تو اسی مساوات کی اصلوں کو بقدر ۲ کے گھٹانا چاہئے اور اس بات کی احتیاط رکھنی چاہئے کہ بعد کے اعمال میں منفی علامت جو اس احتمال کی وجہ سے مطلق رقم کی ہوگی برقرار رہے۔ یہ دوسری اصل ہوگی ۲۲۹۵۲۱۲ - ۲۲۹۵۲۱۲ -

جب تک دونوں اصلیں ایک ساتھ رہتی ہیں اصل کے مناسب ہندسہ کا پتہ آخر سے دوسرے سر سے آخری سر کو دو چند کر کے تقسیم کرنے سے لیکتا ہے یا آخر سے تیسرے سر سے آخر سے دوسرے سر کو دو چند کر کے تقسیم کرنے سے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ مجوزہ مساوات اب ایسے دو درجی کے قریب آتی ہے جو ہر احتمال شدہ مساوات کے آخری تین سروں سے بنتی ہے۔ یہ بالکل ایسا ہی ہے جیسا کہ پچھلی صورتوں میں اور نیوٹن کے طریقہ میں مجوزہ مساوات کا تقرب آخری دو سروں سے بننے والی مفرد مساوات کی شکل میں حاصل ہوا تھا۔ متذکرہ صدر دو درجی کی دونوں اصلیں مجوزہ مساوات کی وہ اصلیں ہونگی جو تقریباً مساوی ہیں، اور جب مساوات  $لا^۲ + ب لا + ج = ۰$  کی دونوں اصلیں تقریباً مساوی ہوں تو انہیں سے کوئی ایک  $ج - ۲ ب$  یا  $ب - ج$  سے تقریباً

حاصل ہو جاتی ہے۔ مثلاً اوپر کی مثال میں ہندسہ ۳  $\frac{۱۸۱ \times ۲}{۱۰۲}$  سے اور

ہندسہ ۲  $\frac{۱۰۰۰ \times ۲}{۹۰۰}$  سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔ اس طریقہ سے ہم عام

طور پر پہلی کوشش میں وہ دو ہندسے معلوم کر سکتے ہیں جن کے درمیان  
اصولوں کا زوج واقع ہے۔ نیز اس سے ہمیں اصولوں کے جدا ہونیکا  
پتہ بھی ملے گا اور مشاہدہ کرنے سے لگ جاتا ہے کہ آخری تین سروں سے  
اس طور پر حاصل کئے ہوئے ہندسے کب مختلف ہوتے ہیں یعنی  
کب  $\frac{2}{b}$  اور  $\frac{b}{12}$  مختلف ہوتے ہیں۔

۳۔ مساوات

$لا^۴ + لا^۸ - لا^۱۰ - لا^۱۴ + لا^۱۶ = ۹۳۶$ ۔  
کی وہ اصلیں جو ۴ اور ۵ کے درمیان واقع ہیں اعشاریہ کے تین مقامات  
تک محسوب کرو۔

جواب :-  $۴۶۲۴۲، ۴۶۲۴۶$

۴۔ مساوات

$۶۴ لا^۳ - ۵۹۲ لا^۲ + ۱۶۴۹ لا - ۱۴۴۵ = ۰$ ۔  
کی وہ دو اصلیں معلوم کرو جو ۲ اور ۳ کے درمیان ہیں۔

جواب :- دونوں اصلیں  $۲۶۱۲۵$

یہاں ہم دیکھتے ہیں کہ تیسرے مقام اعشاریہ تک دونوں اصلیں  
جدا نہیں ہوتیں۔ جب ہم بقدر ۵ کے گھٹاتے ہیں تو مطلق رقم معدوم  
ہوتی ہے جس کے یہ معنی ہیں کہ  $۲۶۱۲۵$  ایک اصل ہے۔ پھر بقدر ۵  
کے گھٹانے سے آخر سے دوسرا سر بھی معدوم ہو جاتا ہے پس  $۲۶۱۲۵$   
دوہری اصل ہے۔

جب کسی مساوات میں دو سے زیادہ تقریباً مساوی اصلیں  
ہوں تو وہ سب ہارنر کے عمل سے متذکرہ بالا طریقہ کے ذریعہ معلوم ہو سکتی  
ہیں۔ عمل میں ایسی صورتیں بہت شاذ واقع ہوتی ہیں۔ طالب علم  
کے لئے وہ اصول جو اوپر بیان کیا گیا ہے ایسی تمام صورتوں میں رہبری  
کرنے کے لئے کافی ہے۔

۱۱۲۔ **تقرب کا لگراج کا طریقہ**۔ لگراج نے عدوی مساوات کی اصل کو ایک مسلسل کسر کی شکل میں بیان کرنے کا ایک طریقہ معلوم کیا ہے۔ لیکن چونکہ یہ طریقہ عملی مقاصد کے لئے ہر ترقی کے طریقہ کے مقابلہ میں بہت ادنیٰ حیثیت رکھتا ہے اس لئے اس کا صرف مختصر ذکر کرنے پر ہم اکتفا کریں گے۔

فرض کرو کہ مساوات  $f(x) = 0$  کی ایک اور صرف ایک اصل متصلہ اعداد  $a$  اور  $b$  کے درمیان واقع ہے۔ مجوزہ مساوات میں  $a$  کی بجائے  $a + \frac{1}{n}$  درج کرو۔ مابین استعمال شدہ مساوات کی ایک اصل مثبت ہوگی۔ فرض کرو کہ امتحان کرنے سے اس کا  $b$  اور  $a + \frac{1}{n}$  کے درمیان واقع ہوتا معلوم ہوتا ہے۔ مابین یہ جو مساوات ہے اس کو  $a = b + \frac{1}{n}$  کے اندراج سے مستحیل کرو۔

ی میں حاصل شدہ مساوات کی مثبت اصل کا  $a$  اور  $b + \frac{1}{n}$  کے درمیان واقع ہونا معلوم کیا جاتا ہے۔ اس عمل کو جاری رکھنے سے اصل کا تقرب ایک مسلسل کسر کی شکل میں حاصل کیا جاتا ہے مثلاً

$$a + \frac{1}{n} = b + \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} = b - a + \frac{1}{n} \\ \dots \dots \dots$$

**مثالیں**

۱۔ مساوات

$$x^2 - 2x - 5 = 0$$

کی مثبت اصل مسلسل کسر کی شکل میں معلوم کرو۔

اصل ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہے۔  $2 = 1 + 1$  کا استعمال

عمل میں لانے کے لئے اول ہم دفعہ ۳ کا عمل استعمال کرتے ہیں اور اصولوں کو بقدر ۲ کے گھٹاتے ہیں۔ پھر ہم وہ مساوات معلوم کرتے ہیں جس کی اصلیں استعمال شدہ مساوات کی اصولوں کی متکافی ہوں۔  
اس طور پر مائیں جو مساوات حاصل ہوتی ہے وہ ہے

(242)

$$۱۰ - ۱۰ - ۱۰ - ۱۰ = ۱$$

اسکی ایک اصل ۱۰ اور ۱۱ کے درمیان ہے۔  $۱۰ + ۱ = ۱۱$   
کرو تو ی میں مساوات حاصل ہوگی  
۶۱ ی<sup>۲</sup> - ۹۲ ی<sup>۲</sup> - ۲۰ ی - ۱ = ۰  
اسکی اصل ۲ اور ۳ کے درمیان ہے۔ رکھو  $۱ + ۱ = ۲$  تو  
میں مساوات ہوگی

$$۵۴ + ۲۵ - ۶۸۹ - ۶۱ = ۰$$

جس کی اصل ۱ اور ۲ کے درمیان ہے۔ علیٰ ہذا القیاس -  
اس لئے اصل کے لئے ہمیں ذیل کا جملہ حاصل ہوتا ہے:-

$$۱ + ۲ = ۳$$

$$۱ + ۱ = ۲$$

$$۱ + ۱ = ۲$$

$$..... + ۱$$

۲ - لاگ - لاگ - ۱۳ = ۰ کی مثبت اصل کسر مسلسل کی شکل میں معلوم کرو۔

$$۱ + ۳ = ۴$$

$$۱ + ۵ = ۶$$

$$۱ + ۱ = ۲$$

$$..... + ۱$$

۱۱۳ - چار درجہ کا عددی حل - عددی مساواتوں کے حل کا

مضمون ختم کرنے سے پیشتر چھٹے باب میں بیان کردہ حل کے طریقوں کے عملی فائدوں کا ذکر کرنا ضروری ہے۔ گو یہ بیان کیا گیا تھا کہ مساواتوں کا عددی حل اس باب کے طریقوں سے عموماً سب سے زیادہ آسانی کے ساتھ حاصل ہو سکتا ہے لیکن ایسی صورتیں بھی ہیں جنہیں چار درجی کے حل کے لئے چھٹے باب کے طریقوں کا استعمال کرنا سہولت بخش ہوتا ہے جب چار درجی مساوات سے محمول کبھی لمباے جسکی ایک اصل متوافق ہو تو اس اصل کو فوراً معلوم کیا جاسکتا ہے اور چار درجی کے حل کی تکمیل ہو سکتی ہے۔ ہم اس قسم کی چند مثالیں ڈیکارٹ کا طریقہ استعمال کر کے (دفعہ ۶۴) حل کرتے ہیں جو عموماً ایسی صورتوں میں عملی طور پر سب سے زیادہ سہولت ہم پہنچاتا ہے۔

## مثالیں

۱۔ چار درجی

$$x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 22x + 11 = 0$$

کو دو درجی اجزاء میں تحلیل کرو۔

دفعہ ۶۴ کا مفروض اختیار کرنے سے ہم آسانی کے ساتھ حاصل کر لیتے

$$x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 22x + 11 = (x^2 + 3x - 5)(x^2 - 9x + 11)$$

$$x^2 + 3x - 5 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 20}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}$$

اور ۶ اور ۳ کو محسوس کرنے سے فہ کے لئے مساوات ملتی ہے

$$x^2 - 9x + 11 = 0 \Rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 44}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{37}}{2}$$

اصلوں کو ۴ سے ضرب دو اور رکھو ۴ = ت تو

$$x^2 - 9x + 11 = 0 \Rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{37}}{2}$$

اب مقسوم علیہم کے طریقہ سے یہ بہ آسانی معلوم ہوتا ہے کی اسکی







جواب :- ۳۶۱۷۸۱۲۳۹۳

۲۔ — لا<sup>۲</sup> - لا<sup>۲</sup> - ۵ = ۰  
کی مثبت اصل اعشاریہ کے ۸ یا ۹ مقامات تک معلوم کرو۔

جواب :- ۲۶ - ۹۴۵۵۱۲۸۳

۳۔ مساوات

لا<sup>۲</sup> - لا<sup>۲</sup> - ۶۵۰۶۸ + لا<sup>۲</sup> + ۵ - لا<sup>۲</sup> - ۱۶۲۷ = ۰  
کی ایک اصل ۳۰۰ اور ۴۰۰ کے درمیان ہے۔ اسکو معلوم کرو۔  
جواب :- متوافق اصل ۳۲۵۶۴

۴۔ مساوات

لا<sup>۲</sup> - لا<sup>۲</sup> - ۱۸۰ + لا<sup>۲</sup> + ۱۸۹۶ - لا<sup>۲</sup> - ۴۵۷ = ۰  
کی وہ اصل معلوم کرو جو ۲۰ اور ۳۰ کے درمیان ہے۔  
جواب :- ۲۸۵۵۲۱۲۷۷۳۸

۵۔ مساوات

لا<sup>۲</sup> - لا<sup>۲</sup> - ۶۹ + لا<sup>۲</sup> + ۶۵۸ - لا<sup>۲</sup> - ۱۳۷۹ = ۰  
کی وہ اصل اعشاریہ کے چھ مقامات تک معلوم کرو جو ۲ اور ۳ کے درمیان ہے۔  
جواب :- ۲۶۵۵۷۳۵۱

۷۔ مساوات

لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۲</sup> - لا<sup>۲</sup> - ۲۳ - لا<sup>۲</sup> - ۷۰ = ۰  
کی مثبت اصل اعشاریہ کے تقریباً ۱۰ مقامات تک معلوم کرو۔  
جواب :- ۵۶۱۳۶۵۷۸۷۲۵۲۸

۸۔ — ۱۲۵ - ۳۰۹ + ۳۲۷ - ۶۷ کا جذر الکعب معلوم کرو۔

جواب :- ۸۷۶۵

۹۔ — ۵۳۷۸۲۲ کا پانچواں جذر معلوم کرو۔

جواب :- ۱۴

۱۰۔ — کبھی مساوات

$$لا^۳ - لا^۲ + لا = ۰$$

کی سب اصلیں معلوم کرو۔  
مثال ۱۲۶ (صفحہ ۱۲۶) کی مساوات لا^۲ + لا + ۱ = ۰ مساوات  
بالا میں تحویل ہوتی ہے۔

جواب :- ۱۶۸۷۹۳۸، ۰۶۳۴۷۲۹، ۱۵۳۲۰۹  
چھوٹی مثبت اصل سے ذیل کے مسئلہ کا حل ملتا ہے :- ایک نصف  
کرہ کو جس کا نصف قطر اکائی ہو دو مساوی حصوں میں قاعدے کے  
متوازی مستوی سے تقسیم کرنا۔

$$لا^۳ + لا^۲ - لا - ۱ = ۰$$

۱۱۔ کعبی کی سب اصلیں معلوم کرو۔ (دیکھو مثال ۱۲۵ صفحہ ۱۲۵)

جواب :- ۱۶۸۷۹۳۸، ۰۶۳۴۷۲۹، ۱۵۳۲۰۹ (246)

۱۲۔ مساوات

$$لا^۵ + لا^۴ - لا^۳ - لا^۲ + لا + ۱ = ۰$$

کی منفی اصل ۱ اور صفر کے درمیان ۵ اعشاریہ کے ۵ مقامات تک  
معلوم کرو (دیکھو مثال ۱۲۶ صفحہ ۱۲۶)

جواب :- ۰.۶۲۸۸۶۳

۱۳۔ مساوات

$$لا^۳ - لا^۲ + لا - ۲۹ = ۰$$

کو حل کرو۔

ہم یہاں یہ دیکھتے ہیں کہ ایک اصل ۷ اور ۸ کے درمیان ہے۔  
ہارنر کے عمل سے اس اصل کا ۷ ہونا معلوم ہوتا ہے۔ اس کا لٹھ مساوات  
دو اصلیں ملتی ہیں جن کو بقدر ۷ کے بڑھا دیا جائے تو کعبی کی باقی دو اصلیں  
حاصل ہوتی ہیں۔

جواب :- ۷، ۷، ۳۴، ۱۱۰

۱۴۔ مساوات لا^۲ - لا - ۲۰۳۸۵ = ۰

کی دو حقیقی اصلیں ہیں۔ ان کو معلوم کرو۔

جواب :- ۲۱۵۴۳ - ۶۷۳۵۵۹۲

مستر جی۔ ایچ۔ ڈارون نے اس مساوات کو مقالہ

*On the precession of a viscous spheroid, and on the Remote History of the Earth*

Phil. Trans. میں درج کیا ہے۔ دیکھو حصہ دوم باب ۱۸ صفحہ ۵۰۸۔  
یہ اصلیں "زمین کی گردش کے جذر الکعب کی وہ دو قیمتیں ہیں جنکے لئے زمین  
اور چاند ملکر ایک استوار جسم کی طرح حرکت کرتے ہیں۔"

۱۵۔ مساوات

$$۲۰\lambda^۳ - ۲۴\lambda^۲ + ۳ = ۰$$

کی سب اصلیں معلوم کرو۔

جواب :- ۱۶۰۶۸۶۵۶۰۶۳۴۶۰۳۶ - ۵۳۱۴۶۹

یہ مساوات ایک مسئلہ کے حل میں واقع ہوتی ہے جو پروفیسر  
طاووس سینڈ نے ایجوکیشنل ٹائمز باب ۷ دسمبر ۱۸۷۷ء میں ایک ایسے ٹھہرے کے  
انصراف کو متعین کرنے کے لئے بیان کیا ہے جو یکساں طور پر لدا ہوا ہو  
اور جو اپنے دونوں سروں اور تقاطع ثقلیت پر تہا ہوا ہو۔ متذکرہ  
صدر حل پروفیسر بال نے حاصل کیا تھا۔

۱۶۔ مساوات

$$۱۴\lambda^۳ + ۱۲\lambda^۲ - ۹\lambda - ۱۰ = ۰$$

کی مثبت اصل معلوم کرو۔

جواب :- ۶۸۵۹۰۶

یہ اور ذیل کی مثالوں کی مساواتیں ایسے سوالوں کی تحقیقات میں  
واقع ہوتی ہیں جو ٹیکنوں پر غمے ہوئے ٹھہروں سے متعلق ہوتے ہیں۔

۱۷۔ مساوات

$$۷\lambda^۴ + ۲۰\lambda^۳ + ۳\lambda^۲ - ۱۶\lambda - ۸ = ۰$$

کی مثبت اصل معلوم کرو۔

جواب :- ۰,۹۱۳۳۶

## ۱۸- مساوات

$$= 2.4 - 0.21 + 0.15 + 0.09 + 0.12 + 0$$

کی مثبت اصل اعشاریہ کے دس مقامات تک معلوم کرو۔

جواب:- ۳۳-۵۸-۶۳۸۶۰۰

(247)

١٩ — ف (لا) = (١ + ٢ - ٣ - ٤ - ٥ - ٦ - ٧ - ٨ - ٩ - ١٠ - ١١ - ١٢ - ١٣ - ١٤ - ١٥ - ١٦ - ١٧ - ١٨ - ١٩ - ٢٠ - ٢١ - ٢٢ - ٢٣ - ٢٤ - ٢٥ - ٢٦ - ٢٧ - ٢٨ - ٢٩ - ٣٠ - ٣١ - ٣٢ - ٣٣ - ٣٤ - ٣٥ - ٣٦ - ٣٧ - ٣٨ - ٣٩ - ٤٠ - ٤١ - ٤٢ - ٤٣ - ٤٤ - ٤٥ - ٤٦ - ٤٧ - ٤٨ - ٤٩ - ٥٠ - ٥١ - ٥٢ - ٥٣ - ٥٤ - ٥٥ - ٥٦ - ٥٧ - ٥٨ - ٥٩ - ٦٠ - ٦١ - ٦٢ - ٦٣ - ٦٤ - ٦٥ - ٦٦ - ٦٧ - ٦٨ - ٦٩ - ٧٠ - ٧١ - ٧٢ - ٧٣ - ٧٤ - ٧٥ - ٧٦ - ٧٧ - ٧٨ - ٧٩ - ٨٠ - ٨١ - ٨٢ - ٨٣ - ٨٤ - ٨٥ - ٨٦ - ٨٧ - ٨٨ - ٨٩ - ٩٠ - ٩١ - ٩٢ - ٩٣ - ٩٤ - ٩٥ - ٩٦ - ٩٧ - ٩٨ - ٩٩ - ١٠٠ - ١٠١ - ١٠٢ - ١٠٣ - ١٠٤ - ١٠٥ - ١٠٦ - ١٠٧ - ١٠٨ - ١٠٩ - ١١٠ - ١١١ - ١١٢ - ١١٣ - ١١٤ - ١١٥ - ١١٦ - ١١٧ - ١١٨ - ١١٩ - ١٢٠ - ١٢١ - ١٢٢ - ١٢٣ - ١٢٤ - ١٢٥ - ١٢٦ - ١٢٧ - ١٢٨ - ١٢٩ - ١٣٠ - ١٣١ - ١٣٢ - ١٣٣ - ١٣٤ - ١٣٥ - ١٣٦ - ١٣٧ - ١٣٨ - ١٣٩ - ١٤٠ - ١٤١ - ١٤٢ - ١٤٣ - ١٤٤ - ١٤٥ - ١٤٦ - ١٤٧ - ١٤٨ - ١٤٩ - ١٥٠ - ١٥١ - ١٥٢ - ١٥٣ - ١٥٤ - ١٥٥ - ١٥٦ - ١٥٧ - ١٥٨ - ١٥٩ - ١٦٠ - ١٦١ - ١٦٢ - ١٦٣ - ١٦٤ - ١٦٥ - ١٦٦ - ١٦٧ - ١٦٨ - ١٦٩ - ١٧٠ - ١٧١ - ١٧٢ - ١٧٣ - ١٧٤ - ١٧٥ - ١٧٦ - ١٧٧ - ١٧٨ - ١٧٩ - ١٨٠ - ١٨١ - ١٨٢ - ١٨٣ - ١٨٤ - ١٨٥ - ١٨٦ - ١٨٧ - ١٨٨ - ١٨٩ - ١٩٠ - ١٩١ - ١٩٢ - ١٩٣ - ١٩٤ - ١٩٥ - ١٩٦ - ١٩٧ - ١٩٨ - ١٩٩ - ٢٠٠ - ٢٠١ - ٢٠٢ - ٢٠٣ - ٢٠٤ - ٢٠٥ - ٢٠٦ - ٢٠٧ - ٢٠٨ - ٢٠٩ - ٢١٠ - ٢١١ - ٢١٢ - ٢١٣ - ٢١٤ - ٢١٥ - ٢١٦ - ٢١٧ - ٢١٨ - ٢١٩ - ٢٢٠ - ٢٢١ - ٢٢٢ - ٢٢٣ - ٢٢٤ - ٢٢٥ - ٢٢٦ - ٢٢٧ - ٢٢٨ - ٢٢٩ - ٢٣٠ - ٢٣١ - ٢٣٢ - ٢٣٣ - ٢٣٤ - ٢٣٥ - ٢٣٦ - ٢٣٧ - ٢٣٨ - ٢٣٩ - ٢٤٠ - ٢٤١ - ٢٤٢ - ٢٤٣ - ٢٤٤ - ٢٤٥ - ٢٤٦ - ٢٤٧ - ٢٤٨ - ٢٤٩ - ٢٥٠ - ٢٥١ - ٢٥٢ - ٢٥٣ - ٢٥٤ - ٢٥٥ - ٢٥٦ - ٢٥٧ - ٢٥٨ - ٢٥٩ - ٢٦٠ - ٢٦١ - ٢٦٢ - ٢٦٣ - ٢٦٤ - ٢٦٥ - ٢٦٦ - ٢٦٧ - ٢٦٨ - ٢٦٩ - ٢٧٠ - ٢٧١ - ٢٧٢ - ٢٧٣ - ٢٧٤ - ٢٧٥ - ٢٧٦ - ٢٧٧ - ٢٧٨ - ٢٧٩ - ٢٨٠ - ٢٨١ - ٢٨٢ - ٢٨٣ - ٢٨٤ - ٢٨٥ - ٢٨٦ - ٢٨٧ - ٢٨٨ - ٢٨٩ - ٢٩٠ - ٢٩١ - ٢٩٢ - ٢٩٣ - ٢٩٤ - ٢٩٥ - ٢٩٦ - ٢٩٧ - ٢٩٨ - ٢٩٩ - ٣٠٠ - ٣٠١ - ٣٠٢ - ٣٠٣ - ٣٠٤ - ٣٠٥ - ٣٠٦ - ٣٠٧ - ٣٠٨ - ٣٠٩ - ٣١٠ - ٣١١ - ٣١٢ - ٣١٣ - ٣١٤ - ٣١٥ - ٣١٦ - ٣١٧ - ٣١٨ - ٣١٩ - ٣٢٠ - ٣٢١ - ٣٢٢ - ٣٢٣ - ٣٢٤ - ٣٢٥ - ٣٢٦ - ٣٢٧ - ٣٢٨ - ٣٢٩ - ٣٣٠ - ٣٣١ - ٣٣٢ - ٣٣٣ - ٣٣٤ - ٣٣٥ - ٣٣٦ - ٣٣٧ - ٣٣٨ - ٣٣٩ - ٣٤٠ - ٣٤١ - ٣٤٢ - ٣٤٣ - ٣٤٤ - ٣٤٥ - ٣٤٦ - ٣٤٧ - ٣٤٨ - ٣٤٩ - ٣٥٠ - ٣٥١ - ٣٥٢ - ٣٥٣ - ٣٥٤ - ٣٥٥ - ٣٥٦ - ٣٥٧ - ٣٥٨ - ٣٥٩ - ٣٦٠ - ٣٦١ - ٣٦٢ - ٣٦٣ - ٣٦٤ - ٣٦٥ - ٣٦٦ - ٣٦٧ - ٣٦٨ - ٣٦٩ - ٣٧٠ - ٣٧١ - ٣٧٢ - ٣٧٣ - ٣٧٤ - ٣٧٥ - ٣٧٦ - ٣٧٧ - ٣٧٨ - ٣٧٩ - ٣٨٠ - ٣٨١ - ٣٨٢ - ٣٨٣ - ٣٨٤ - ٣٨٥ - ٣٨٦ - ٣٨٧ - ٣٨٨ - ٣٨٩ - ٣٩٠ - ٣٩١ - ٣٩٢ - ٣٩٣ - ٣٩٤ - ٣٩٥ - ٣٩٦ - ٣٩٧ - ٣٩٨ - ٣٩٩ - ٤٠٠ - ٤٠١ - ٤٠٢ - ٤٠٣ - ٤٠٤ - ٤٠٥ - ٤٠٦ - ٤٠٧ - ٤٠٨ - ٤٠٩ - ٤١٠ - ٤١١ - ٤١٢ - ٤١٣ - ٤١٤ - ٤١٥ - ٤١٦ - ٤١٧ - ٤١٨ - ٤١٩ - ٤٢٠ - ٤٢١ - ٤٢٢ - ٤٢٣ - ٤٢٤ - ٤٢٥ - ٤٢٦ - ٤٢٧ - ٤٢٨ - ٤٢٩ - ٤٣٠ - ٤٣١ - ٤٣٢ - ٤٣٣ - ٤٣٤ - ٤٣٥ - ٤٣٦ - ٤٣٧ - ٤٣٨ - ٤٣٩ - ٤٤٠ - ٤٤١ - ٤٤٢ - ٤٤٣ - ٤٤٤ - ٤٤٥ - ٤٤٦ - ٤٤٧ - ٤٤٨ - ٤٤٩ - ٤٥٠ - ٤٥١ - ٤٥٢ - ٤٥٣ - ٤٥٤ - ٤٥٥ - ٤٥٦ - ٤٥٧ - ٤٥٨ - ٤٥٩ - ٤٦٠ - ٤٦١ - ٤٦٢ - ٤٦٣ - ٤٦٤ - ٤٦٥ - ٤٦٦ - ٤٦٧ - ٤٦٨ - ٤٦٩ - ٤٧٠ - ٤٧١ - ٤٧٢ - ٤٧٣ - ٤٧٤ - ٤٧٥ - ٤٧٦ - ٤٧٧ - ٤٧٨ - ٤٧٩ - ٤٨٠ - ٤٨١ - ٤٨٢ - ٤٨٣ - ٤٨٤ - ٤٨٥ - ٤٨٦ - ٤٨٧ - ٤٨٨ - ٤٨٩ - ٤٩٠ - ٤٩١ - ٤٩٢ - ٤٩٣ - ٤٩٤ - ٤٩٥ - ٤٩٦ - ٤٩٧ - ٤٩٨ - ٤٩٩ - ٥٠٠ - ٥٠١ - ٥٠٢ - ٥٠٣ - ٥٠٤ - ٥٠٥ - ٥٠٦ - ٥٠٧ - ٥٠٨ - ٥٠٩ - ٥١٠ - ٥١١ - ٥١٢ - ٥١٣ - ٥١٤ - ٥١٥ - ٥١٦ - ٥١٧ - ٥١٨ - ٥١٩ - ٥٢٠ - ٥٢١ - ٥٢٢ - ٥٢٣ - ٥٢٤ - ٥٢٥ - ٥٢٦ - ٥٢٧ - ٥٢٨ - ٥٢٩ - ٥٣٠ - ٥٣١ - ٥٣٢ - ٥٣٣ - ٥٣٤ - ٥٣٥ - ٥٣٦ - ٥٣٧ - ٥

کی سب متوافق اصلیں معلوم کرو اور مساوات کا مکمل حل حاصل کرو۔

جواب :-  $f(la) = (la + 3)(la + 2)(la - 1)$

۲۰۔ اسی طرح مساوات

$$- = 84 - U_{115} + U_{116} - U_{117} + U_{118} - U_{119} = (f)$$

کو حل کرو۔

جواب :-  $(1+1)(1-1)(1-1)(1-1)(1-1)(1-1)(1-1)(1-1)(1-1)(1-1)$

۲۱۔ وہ شہر معلوم کرو کہ دفعہ ۹۹ مثال ۳ میں اسٹرم کا جو دو درجی

باقی ہے اس کی اصلیں خیالی ہوں۔

جواب :- ۵۴ + ۱۳ = مثبت۔

یہ شرط اس وقت پوری ہوتی ہے جبکہ ۱۰ اور جے دونوں مثبت ہوں (کیونکہ اس صورت میں دفعہ ۳۷ کی متبادل کی رو سے ج کو مثبت ہونا چاہئے) اس لئے آسانی کے ساتھ یہ نتیجہ نکالا جاسکتا ہے کہ متذکرہ صدر چار درجہ حقیقی اعلیٰ نہیں رکھتا جبکہ ۱۰ اور جے مثبت ہوں (دیکھو مثال ۱۵ صفحہ ۳۲۳)

۲۲۔ جب اس چار درجہ کی دو اعلیٰ عہ کے مساوی ہوں تو

## ثابت کرو کہ

$$\frac{ع\ك}{ع\ك-ع\Delta} = ب + ع\Delta$$

۲۳۔ اگر مساوات  $f(x) = 0$  کی سبب اصلیں حقیقی ہوں تو

ثابت کرو کہ مساوات  $f(لا) - [ف(لا)] = ۰$  کی سبب اصلیں

۲۴۔ اگر کسی درجہ کی سادات میں جو لا کی قوتوں کی بموجب ترتیب دی گئی ہو تین متصل رقمیں سلسلہ ہندسیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ اس کی اصلیں سب کی سب حقیقی نہیں ہو سکتیں۔

تین رقص اس شکل کے  $\text{لا} + \text{ک} + \text{ع} + \text{لا} + \text{ک} + \text{ع} + \text{لا}$  کی  
 ہونی چاہئیں۔ فرض کرو کہ مسادات کو لا۔ ع سے ضرب دیا گیا ہے۔  
 تب حاصل شدہ مسادات کی دو متصل رقص غائب ہو جائیگی اور اس لئے  
 اس کی کم از کم دو خیالی اصلیں ہونی چاہئیں لیکن اس مسادات کی اصلیں  
 سوائے ع کے دی ہوئی مسادات کی اصلیں ہیں۔

۲۵۔ اگر کسی مساوات کے پارٹشل سے سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ اسکی اصلیں سب کی سب حقیقی نہیں ہو سکتیں۔

اس کو گزشتہ مثال میں تحویل کیا جاسکتا ہے۔ ان چار رقموں کو انکی خاص شکل میں لکھ کر لا۔ اسے ضرب دینے سے یہ آسانی کے ساتھ معلوم ہوتا ہے کہ حاصل شدنی مساوات کی تین متصل رقمیں سلسلہ منہدیہ میں ہیں۔

۲۶۔ پانچ درجی کے لئے جس میں دوسری رقم غیر موجود ہو اسٹرم کے پہلے دو یاقیوں کو محسوب کرو۔

ف (لا) = لا + لا + لا + لا + ج لا + د

جواب :- ۱-۲ و ۱-۳ پ ۱-۴ ج ۱-۵

ک = لا + ب + ج

جہاں (۱) = ۲۰ ج - ۱۲ ب - ۵ ب<sup>۲</sup>، (۲) = ۱۵ د - ۸ ا ب - ۶ ب ج،

ج. = ۲۲ ج. - ۵ پ. د.

اوپر کی تقریم کو باقی رکھیں تو تیسرے باقی کیلئے  $5 + 6 = 11$  کے سروں





سے حاصل ہونگی جہاں گ<sup>۱</sup> کی بجائے اسکی قیمت دفعہ ۳ کی مثالہ سے رکھی گئی ہے اور مثبت مضروب فیہ خارج کر دئے گئے ہیں۔  
 ۳۰۔ یولر کے کعبی کے لئے اسٹرم کے تعامل محسوب کرو (دفعہ ۶۱ دیکھو)۔  
 چند تجویلات کے بعد اور مثبت اجزاء کے ضربی کو خارج کرنے سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$ف (لا) \equiv لا^۳ + لا^۲ + لا + ۳(لا^۲ - لا) - لا - لا^۲ - لا^۳$$

$$ف (لا) \equiv لا^۳ + لا^۲ + لا + ۳(لا^۲ - لا) - لا - لا^۲ - لا^۳$$

$$لا^۳ \equiv لا^۳ + لا^۲ + لا + ۳(لا^۲ - لا) - لا - لا^۲ - لا^۳$$

$$لا^۳ \equiv لا^۳ - لا^۲ - لا - ۲$$

چار درجہ کی اصلوں کی نوعیت کے متعلق جو شرطیں دفعہ ۲۸ میں حاصل ہوئی ہیں سب کو ان تجویزوں سے مثال ۲ صفحہ ۳۸ کی مدد سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔ اور یہ دیکھ لیا جاسکتا ہے کہ اصلوں کے حقیقی ہونے کے لئے جو شرطیں دفعہ ۱۰۰ اور تمذکرہ صدر دفعہ میں حاصل ہوئی تھیں دونوں یہاں باہم حاصل ہوتی ہیں۔ کیونکہ یولر کے کعبی کی سب اصلوں کے حقیقی اور مثبت ہونے کے لئے لا کی بجائے مضروب ج کرنے سے علامت کی تین تبدیلیاں ملنی چاہئیں اور اسکے لئے اس بات کی ضرورت ہے کہ لا - لا^۲ اور لا^۲ - لا - ۲ جے درجوں منفی ہوں۔

(242)

# بارہواں باب

## ملف اعداد اور ملف متغیر

۱۱۴۔ ملف اعداد۔ تریسیمی تعبیر۔ ابواب گذشتہ میں اکثر ایسی مثالوں سے واسطہ رہا ہے جنہیں عددی مساواتوں کے حل میں  $1 + x = 7$  کے شکل کی مقدار میں واقع ہوئی ہیں جو منفی عدد کا جذر المربع نکالنے پر مشتمل ہیں۔ ایسے جملہ کو جمعیں ۱ مثبت یا منفی حقیقی اکائیاں اور ب مثبت یا منفی خیالی اکائیاں شامل ہوں ملف عدد کہا جاتا ہے (دیکھو دفعہ ۱۵)۔ خیالی اکائی  $1 = -1$  کو اختصاراً  $x$  سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ حقیقی اور خالص خیالی اعداد دونوں جملہ  $1 + x$  میں شامل ہیں کیونکہ قبل الذکر اعداد یعنی حقیقی اعداد  $1 = 0$  رکھنے اور ثنائی الذکر  $1 = -1$  رکھنے سے حاصل ہوتے ہیں۔ ملف اعداد پر تمام معمولی حسابی اعمال جاری ہو سکتے ہیں اور کسی ایسے حسابی عمل کے نتیجہ میں  $x$  کی ایک سے بڑی صحیح قوتوں کو مربوط  $x = 1$  کی مدد سے مختصر کیا جاسکتا ہے۔

اب ہم ملف اعداد کو ہندسی طور پر تعبیر کرنے کا طریقہ واضح کرتے ہیں جو ان تفاضلوں کے سمجھنے میں بہت سہولت پیدا کر دیگا جنہیں اس قسم کی مقدار میں شامل ہوتی ہیں۔

جملہ  $1 + x$  کو شکل

مہ (جم  $e + x$  جب  $e$ )

میں لکھا جاسکتا ہے جہاں

$$م = \sqrt{ب^2 + ا^2} \quad ب = \frac{ا}{\text{جیب } ع} = \frac{ا}{\frac{ب}{م}} = \frac{ا \cdot م}{ب}$$

مقدار مہ کو ملنے عدد ۱ + خ ب کا مقیاس اور زاویہ عم  
کو سمت کہتے ہیں۔ یہ مقیاس کو ہمیشہ مثبت لیا جاتا ہے اور جذر کی منفی  
علامت سمت کو بقدر  $\pi$  کے بڑھانے کے جواب میں ہے۔  
فرض کرو کہ علی القوائم محور و لا، و ما (شکل ۷) لئے گئے ہیں

اور ایک ایسا نقطہ ہے کہ لا و ا = ع اور و ا = م۔ تب  
و م = مہ جم ع = ا اور ا م = مہ جب ع = ب۔ اس لئے

جملہ ۱ + خراب کو

نرمی طور پر اس

خط مستقیم سے تعبیر

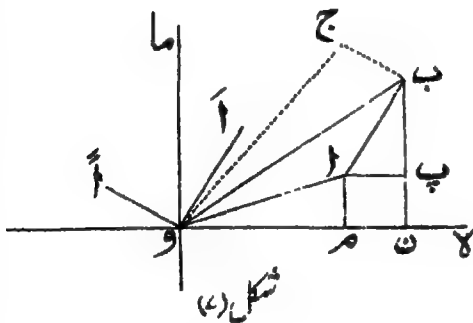
کیا جاسکتا ہے

جوڑے انگ

نعمینجا گیا ہو جس کے

محدوث ثابت محوروں

کے لحاظ سے دوس



ہونگے جبکہ  $1 = 1$  اور  $ب = ب$  یعنی جبکہ ان کے مقیاس باہم مساوی ہوں اور جبکہ سمت یا تو باہم مساوی ہوں یا  $۲۲$  کے ضعف کا فرق رکھیں۔  
اختصار کی خاطر آئندہ  $1 + خ$  کے مقیاس اور سمت کو تقیم مق  $(1 + خ)$  'سمت'  $(1 + خ)$  سے تعبیر کیا جائیگا۔

۱۱۵۔ ملفوظ اعداد۔ جمع اور تفریق۔ فرض کرو کہ دوسرا ملفوظ عدد  $1 + خ$  خط مستقیم  $1$  سے تعبیر ہوتا ہے اور اسلئے  $1 = مق (1 + خ)$  'کلا'  $1 = سمت (1 + خ)$  اب ہم حاصل جمع

$$1 + خ + 1 + خ$$

کو تعبیر کر نیا طریقہ متعین کرتے ہیں۔

(251)

اس مجموعہ کو شکل  $1 + 1 + خ + خ + ب + ب$  میں لکھنے سے دفعہ ۱۱۴ کی ترقیم کی ہوجب ہم دیکھتے ہیں کہ یہ ایک ایسے خط مستقیم سے تعبیر ہوگا جو مبدأ سے اس نقطہ تک کھینچا گیا ہو جس کے محدود  $1 + 1 + ب + ب$  ہیں۔ اس نقطہ کو معلوم کرنے کے لئے  $1 + ب$  کو  $1$  کے متوازی اور مساوی کھینچو تو چونکہ  $1 + ب$  'ب' پ 'ب' علی الترتیب  $1 + ب$  کے مساوی ہیں  $1 + ب$  مطلوبہ نقطہ ہے اور

$$1 + ب = مق \{ 1 + 1 + خ + خ + ب + ب \}$$

$$1 + ب = سمت \{ 1 + 1 + خ + خ + ب + ب \}$$

اسلئے دو ملفوظ عددوں کو جمع کرنے کے لئے ہم  $1 + ب$  کھینچیں جو انہیں سے ایک کو تعبیر کرتا ہے اور اس کے سرے پر  $1 + ب$  کھینچیں ہیں جو دوسرے کو تعبیر کرتا ہے (یعنی اس طور پر کہ اسکا طول دوسرے عدد کے مقیاس کے مساوی ہو اور دلا کے ساتھ یہ خط جو زاویہ بنائے

وہ اس کی سعت کے مساوی ہو)۔ تب  $و ب$  ان دو ملف عددوں کے مجموعہ کو تعبیر کریگا۔  
 اب چونکہ  $و ب$  و  $ا + ا ب$  سے بڑا نہیں ہے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ دو ملف عددوں کے مجموعہ کا مقیاس ان کے مقیاسوں کے مجموعہ سے کم (یا زیادہ سے زیادہ اس کے مساوی) ہوتا ہے۔

اس طریقہ تعبیر کو اس قسم کی مقداروں کی کسی تعداد کا مجموعہ معلوم کرنے میں تو وسیع دیکھا جاسکتی ہے۔ مثلاً تیسرے ملف عدد  $و + ب$  کو جمع کرنے کے لئے جو  $و$  سے تعبیر ہوتا ہے ہم  $ب$  کو  $و$  کے متوازی اور مساوی کھینچتے ہیں اور  $و$  کو ملائے ہیں۔ تب  $و ب$  تین ملف اعداد  $و$ ،  $و$ ،  $و$  کے مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے۔ یہ بھی ظاہر ہے کہ ہم عام طور پر یہ نتیجہ نکال سکتے ہیں کہ ملف مقداروں کی کسی تعداد کے مجموعہ کا مقیاس ان کے مقیاسوں کے مجموعہ سے کم (یا زیادہ سے زیادہ مساوی) ہوتا ہے۔

تفریق کو بھی اسی طرح تعبیر کیا جاسکتا ہے۔ چونکہ  $و ب$  سے  $و$  اور  $و$  کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے،  $و$  سے  $و ب$  اور  $و$  کا فرق تعبیر ہوگا۔ اس لئے دو ملف عددوں کو تفریق کرنا ہو تو پہلے عدد کو تعبیر کرنیوالے خط کے سرے پر ہم ایک خط کھینچتے ہیں جو دوسرے عدد کو تعبیر کرنیوالے خط کے متوازی اور مساوی ہے مگر مخالف سمت میں (یعنی ایسی سمت میں جو  $و$  کے ساتھ دوسرے کی سمت سے بقدر  $۲$  کے زیادہ بڑا زاویہ بناتی ہے)۔ اس خط کے سرے کو ہم  $و$  سے ملائے ہیں تاکہ دئے ہوئے دو ملف عددوں کے فرق کو تعبیر کرنیوالا خط ملجائے۔

۱۱۶۔ ضرب اور تقسیم۔ دو ملتف عدد  $۱ + خ ب$  +  $۱ + خ ب$

کو ضرب دینے کے لئے ان کو ہم اس شکل میں لکھتے ہیں

$۱ + خ ب = مہ (جم عہ + خ جب عہ)$  +  $۱ + خ ب = مہ (جم عہ + خ جب عہ)$   
تو ڈیمو انٹر کے مسئلہ کی رو سے

(252)

$(۱ + خ ب) (۱ + خ ب) = مہ مہ \{جم (عہ + عہ) + خ جب (عہ + عہ)\}$

جس سے ثابت ہے کہ دو ملتف عددوں کا حاصل ضرب ایک

ملتف عدد ہے جس کا مقیاس دونوں مقیاسوں کا حاصل ضرب ہے

اور جسکی سعت دونوں سعتوں کا مجموعہ۔

اسی طرح یہ معلوم ہوتا ہے کہ اس قسم کے اجزائے ضربی کی کسی تعداد کا حاصل ضرب ایک ملتف مقدار ہے جس کا مقیاس تمام مقیاسوں کا حاصل ضرب ہے اور جسکی سعت تمام سعتوں کا مجموعہ۔

$۱ + خ ب$  کو  $۱ + خ ب$  سے تقسیم کرنے کے لئے ہم دیکھتے ہیں کہ  
 $\frac{۱ + خ ب}{۱ + خ ب} = مہ \{جم (عہ + عہ) + خ جب (عہ + عہ)\}$

جس سے ثابت ہے کہ دو ملتف عددوں کا خارج قسمت

ایک ملتف عدد ہے جس کا مقیاس دونوں مقیاسوں کے

خارج قسمت کے مساوی ہے اور جسکی سعت دونوں سعتوں کے

فرق کے مساوی۔

دفعہ ۱۶ کے مسئلہ کے ثبوت میں یہ مان لیا گیا ہے کہ جب اجزائے ضربی (خیالی یا حقیقی) کی کسی تعداد کا حاصل ضرب معدوم ہوتا ہے تو

ان میں سے ایک جزو ضربی کو معدوم ہونا چاہئے۔ جب تمام اجزائے ضربی حقیقی ہوں تو یہ مسئلہ بالکل واضح ہے اور اوپر جو کچھ ثابت ہوا اس سے اس وقت بھی جبکہ اجزائے ضربی ملطف ہوں یہی نتیجہ برقرار رہتا ہے کیونکہ حاصل ضرب کا مقياس اسی صورت میں معدوم ہو سکتا ہے جب ان میں سے کوئی جزو ضربی معدوم ہو اور اس لئے وہ ملطف مقدار معدوم ہونی چاہئے جس کا یہ جزو ضربی مقياس ہے۔

۱۱۔ ملطف عددوں پر دوسرے اعمال۔ پچھلے مسئلوں سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ملطف عدد کی کوئی صحیح قوت شکل ۱ + ضرب میں بیان کی جا سکتی ہے جہاں ۱ اور ب حقیقی ہیں۔ اور زیادہ عام صورت میں اگر کسی منطق صحیح تفاعل

$$1^1 + 1^2 + 1^3 + \dots + 1^n + 1^m$$

میں جس کے سر ملطف (شمول حقیقی) عدد ہیں ۱ کی بجائے ملطف مقدار ۱ + ضرب درج کیجائے تو نتیجہ کو معیاری شکل ۱ + ضرب میں بیان کیا جا سکتا ہے۔

(225)

اس باب میں ملطف عددوں کے ایسے تفاعلوں پر بحث کرنا مقصود نہیں ہے جو منطق صحیح تفاعلوں کی اس نوع میں داخل نہیں ہیں جس سے ہمیں اب تک واسطہ رہا ہے۔ لیکن ڈیموایر کے مسئلہ کی مدد سے یہ ثابت کرنا آسان ہے کہ علم الحساب کے بقیہ اعمال سے ہر صورت میں مثلاً کسری یا ملطف قوت نما پر اٹھانے کو کارم لینے اور ان قوتوں پر اٹھانے سے جن کی اساس اور قوت نما دونوں ملطف ہوں ایک ملطف عدد ہی حاصل ہوتا ہے۔ اس کو یوں بیان کیا جاتا ہے کہ ملطف عدد ایک ایسا نظام یا گروہ بناتے ہیں جو خود مکمل ہے۔

۱۱۸۔ ملطف متغیر۔ اس کتاب کے ابتدائی ابواب میں کشیر الارقام

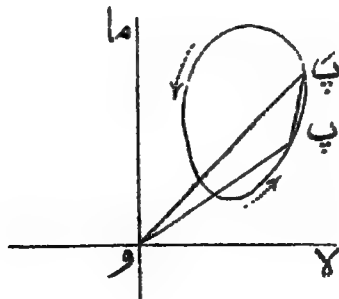
تغیر کا مطالعہ متغیر کی  $-\infty$  سے  $+\infty$  تک حقیقی قیمتوں میں سے گزرنے کے جواب میں کیا گیا تھا اور شیر الارقام کی شکل کو ایک منحنی کے ذریعہ تعبیر کرنے کا طریقہ واضح کیا گیا تھا۔ یہ فی الحقیقت اس عام شیر الارقام کی ایک خاص صورت ہے جس پر اب بحث کیا جائیگی۔

فرض کرو کہ  $y$  میں ایک منطق اور صحیح تعامل دیا گیا ہے جس کے سر حقیقی یا ملف عدد ہیں یعنی

$$f(y) = 1 \cdot y^0 + 1 \cdot y^1 + 1 \cdot y^2 + \dots + 1 \cdot y^{n-1} + 1 \cdot y^n$$

ہم اس کے تغیرات کا مطالعہ  $y$  کی مختلف قیمتوں کے جواب میں کر سکتے ہیں جہاں  $y$  ملف شکل  $la + x$  میں ہے اور جہاں  $la$  اور  $ma$  دونوں تمام ممکن حقیقی قیمتیں اختیار کرتے ہیں۔ اس شکل  $la + x$  کو ہم ملف متغیر کہیں گے۔ ظاہر ہے کہ اس تغیر کی تمام ممکن حقیقی قیمتیں  $la + x$  کی قیمتوں میں شامل ہیں کیونکہ یہ وہ قیمتیں ہیں جو  $la$  کو بدلنے اور  $ma =$  رکھنے سے پیدا ہوتی ہیں۔ دفعہ ۱۱۴ کے اصولوں کی بموجب ہم ملف متغیر  $la + x$  کو نقطہ  $la$  (شکل ۸) سے تعبیر کر سکتے ہیں جو ایک ثابت نقطے سے اس نقطہ تک کھینچا گیا ہے جس کے محدود  $la$  میں۔ یا ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ  $la + x$  نقطہ  $la$  سے تعبیر ہوتا ہے

(254)

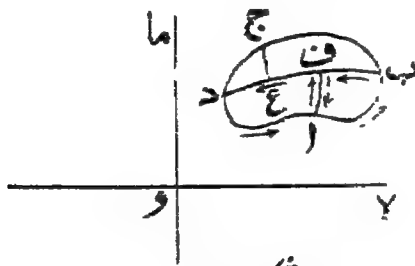


اس طور پر  $la + x$  کی تمام ممکن قیمتیں مستوی میں گئے تمام نقطوں سے تعبیر ہونگی۔ اب چونکہ  $y$  کی کسی مخصوص قیمت کے لئے  $f(y)$





تغیر کی ایک خاصیت اخذ کر سکتے ہیں جو آئندہ مشاہدات میں اہم ثابت ہوگی۔ فرض کرو کہ ایک مستوی رقبہ خطوط  $d$ ،  $f$ ،  $e$ ،  $c$  وغیرہ سے متعدد حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے (شکل ۹) تو پورے رقبہ کے محیط کے لحاظ سے سمت کا تغیر جزوی رقبوں کے محیطوں کے لحاظ سے اس کے تغیرات کے مجموعہ کے مساوی ہے جہاں یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ تمام رقبے متغیر کے ایک ہی سمت میں حرکت کرنے سے مرسم ہوئے ہیں۔ یہ نتیجہ بدیہی ہے کیونکہ جب نقطہ تمام رقبوں کو ایک ہی جہت میں مرسم کرتا ہے تو تقسیم کرنیوالے اندرونی خطوں میں سے ہر ایک دوبار مرسم ہوتا ہے مگر مخالف سمتوں میں اور بیرونی محیط صرف ایک مرتبہ مرسم ہوتا ہے پس سمت کا مجموعی تغیر تقسیم کرنیوالے خطوں کے لحاظ سے صفر کے مساوی ہے اور بیرونی محیط کے لحاظ سے اس کا جو تغیر ہے



شکل (۹)

صرف وہی باقی رہتا ہے۔ مثال کے طور پر شکل میں رقبوں  $a$ ،  $b$ ،  $f$ ،  $d$  پر غور کرو۔ جب نقطہ ان رقبوں کو تیروں

سے ظاہر کی ہوئی سمت میں مرسم کرتا ہے تو  $f$  کے لحاظ سے مجموعی تغیر صفر ہے۔

۱۱۹۔ ملف متغیر کے تفاعل کا تسلسل۔ فرض کرو کہ ملف

متغیری ایک ثابت قیمت  $y$  سے شروع کر کے ایک چھوٹا اضافہ  $h$   $\equiv$   $g$  (جم نہ + خم جب نہ) حاصل کرتا ہے۔ تب اگر  $f$  (بی) دیا جائے

تفاعل ہو تو دفعہ ۶ کے پھیلاؤ میں لا کی بجائے ی رکھنے سے  

$$ف(ی) = ف(ی + ہ) = ف(ی) + ف(ی) + ف(ی) + \dots + \frac{ف(ی)}{۲ \times ۱} + \dots$$
 اور ف(ی) میں اضافہ جو ف(ی + ہ) - ف(ی) کے مساوی ہے  

$$ف(ی) + \frac{ف(ی)}{۲ \times ۱} + \frac{ف(ی)}{۳ \times ۲ \times ۱} + \dots$$
 ہوگا۔

اس جملہ میں ھ کی قوتوں کے سرسب کے سب معمولی شکل  
 کے ملفت جملے ہیں اور اگر ان کے مقیاس ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵ کی رو سے مجموعہ کا مقیاس، مقیاسوں کے  
 مجموعہ سے کم ہوتا ہے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ف(ی) کے اضافہ کا  
 مقیاس

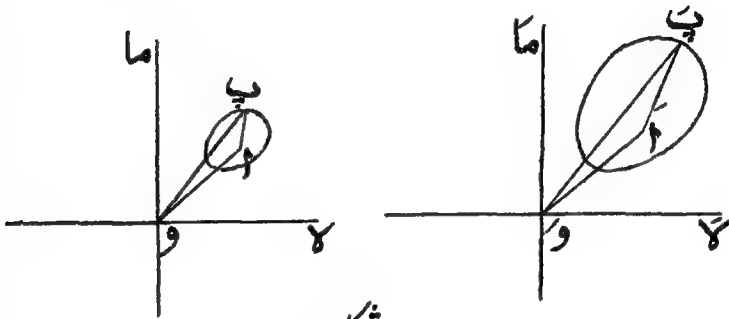
$$۱ غہ + ۲ غہ + ۳ غہ + \dots$$

سے کم ہے۔  
 اب غہ کو ایسی قیمت دیا جاتی ہے (دفعہ ۵) جس کے لئے  
 یا اس سے چھوٹی قیمت کے لئے اس جملہ کی قیمت کسی مقررہ مقدار  
 سے کم ہو۔ اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ملفت متغیر کے لانتہا چھوٹے  
 تغیر کے جواب میں (یعنی اس تغیر کے جواب میں جس کا مقیاس لانتہا  
 چھوٹا ہو) تفاعل میں بھی لانتہا چھوٹا تغیر واقع ہوتا ہے۔ یہ الفاظ دیگر

(25)

تفاعل ملفت متغیر کے تغیر کے ساتھ ساتھ مسلسل بدلتا ہے۔  
 ۱۲۔ ف(ی) کی سمت کا تغیر جب ملفت متغیر ایک  
 چھوٹا بند منحنی مرتسم کرے۔ ی کی قیمتوں کے ایک مسلسل سلسلہ کے

جواب میں ف (ی) کی قیمتوں کا ایک مسلسل سلسلہ ملتا ہے جبکہ خود  
ی کی قیمتوں کی طرح، ایک مستوی میں کے نقطوں سے تعبیر کیا جاسکتا  
ہے۔ نقطوں کے ان سلسلوں کو ہم ایک دوسرے سے قریب دو  
شکلوں سے تعبیر کرتے ہیں (شکل ۱۰) جنکے متعلق یہ فرض کر لیا جاسکتا ہے کہ



شکل (۱۰)

و مختلف مستویوں پر کھینچے گئے ہیں تاکہ غلط فہمی واقع نہ ہو۔  
لا + خ ما کو تعبیر کرنے والے ہر نقطہ پ کے جواب میں ف (ی)  
کو تعبیر کر نیوالا ایک معین نقطہ پ حاصل ہوتا ہے۔ اس لئے  
جب پ، ایک مسلسل منحنی مرتسم کرتا ہے تو پ بھی ایک مسلسل  
منحنی مرتسم کرتا ہے اور جب پ، ایک بند منحنی کو مرتسم کرنے کے  
بعد اپنے ابتدائی مقام پر لوٹتا ہے تو پ بھی اپنے ابتدائی مقام پر  
واپس آتا ہے۔

فی الحال ہمارا مقصد ف (ی) کی سمیت کے تغیر پر بحث کرنا  
ہے جبکہ پ، ایک بند منحنی مرتسم کرے۔ فرض کرو کہ (۱) کوئی معین  
نقطہ ہے جس کے محدود لا، یا یعنی ی = لا + خ ما ہیں۔ ہم بحث  
(257) کو دو صورتوں میں تقسیم کرتے ہیں:-  
(۱) جبکہ لا + خ ما، ف (ی) = کی اہل نہ ہو یعنی جبکہ ف (ی)  
سے مختلف ہو۔

(۲) جبکہ لا + خ ما، ف (ی) = کی اصل ہو یا ف (ی) =۔  
 پہلی صورت میں نقطہ ۱ کے جواب میں ایک نقطہ ۱ ایسا موجود  
 ہوتا ہے جو ف (ی) کی قیمت کو تعبیر کرتا ہے اور و (صفر سے  
 مختلف ہوتا ہے۔ فرض کرو ی = ی + ھ جہاں ھ = غ (حجم ذہ  
 + خ جب ذہ) اور مان لو کہ پ جو ی کو تعبیر کرتا ہے ایک چھوٹا  
 بند منحنی ۱ کے گرد مرسم کرتا ہے۔ فرض کرو کہ پ، ف (ی) کو تعبیر  
 کرتا ہے تو ۱ پ = ف (ی) کا اضافہ، ی کے اضافہ ۱ پ  
 کے جواب میں تعبیر ہوگا۔ اب دفعہ ماسبق سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ  
 غ کو اتنی چھوٹی قیمتیں دی جا سکتی ہیں کہ ف (ی) کے اضافہ کا مقیاس یعنی  
 ۱ پ ہمیشہ کسی مقررہ مقدار و (۱ سے چھوٹا ہو۔ پس یہ فرض  
 کر لیا جا سکتا ہے کہ پ، ۱ کے گرد اتنا چھوٹا بند منحنی مرسم کرتا ہے  
 کہ اس کے متناظر پ سے مرسم شدہ بند منحنی و کے باہر ہو۔ اسلئے  
 دفعہ ۱۱۸ کی رو سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ پ سے اگر ایک چھوٹا بند منحنی  
 مرسم ہو جس میں کوئی ایسا نقطہ شامل نہیں ہے جو ف (ی) = کو  
 یور کرتا ہے تو ف (ی) کی سعت کا کل تغیر کچھ نہیں ہوتا۔  
 (۲) دوسری صورت میں فرض کرو کہ لا + خ ما، مسادات ف (ی) =  
 کی ایک اصل ہے جو م مرتبہ تکرار پاتی ہے اور فرض کرو کہ  
 ف (ی) = (ی - ی) (ی) (ی) (ی)

تب  
 ف (ی) = ھ (ی) = غ (حجم ذہ + خ جب م ذہ) (ی) (ی)  
 اس صورت میں و =۔ اور جب پ، ۱ کے گرد ایک  
 بند منحنی مرسم کرتا ہے تو پ اپنے ابتدائی مقام پر واپس ہوتا ہے اور  
 ف (ی) کی سعت بقدر ۲۲ کے ضعف کے بڑھ جاتی ہے جسکو طریقہ

(258)

ذیل پر متعین کیا جاسکتا ہے :- مساوات بالا سے  
 سعت ف (ی) = م فہ + سعت پ (ی)  
 اور سعت ف (ی) کا اضافہ، م فہ کے اضافہ میں سعت پ (ی) کا  
 اضافہ جمع کرنے سے حاصل ہوگا۔ اب یہ دوسرا اضافہ (۱) کی رو سے  
 کچھ نہیں کیونکہ پ سے جو بند منحنی مرتسم ہوتا ہے اس کے متعلق  
 یہ فرض کر لیا جاسکتا ہے کہ اس میں پ (ی) = ۰ کی کوئی اصل شامل  
 نہیں ہے۔ اور چونکہ فہ کا اضافہ، پ کی ایک گردش میں ۲۲  
 ہوتا ہے اس لئے م فہ کا اضافہ ۲۲ م ہے۔ پس یہ نتیجہ نکلتا  
 ہے کہ جب، پ ایک بند منحنی مرتسم کرتا ہے جس میں مساوات  
 ف (ی) = ۰ کی ایک اہل م رتبہ والی شامل ہے تو ف (ی)  
 کی سعت میں بقدر ۲۲ م کے اضافہ ہوتا ہے۔

۱۲۱۔ کوشی کا مسئلہ۔ جب، ی، ایک مستوی میں ایک  
 خط دو مخالف سمتوں میں مرتسم کرتا ہے تو اس کے جواب میں ف (ی)  
 اپنے مستوی میں ایک خط دو مخالف سمتوں میں مرتسم کرتا ہے اور سعت  
 ف (ی) میں مساوی اور مخالف تغیرات واقع ہوتے ہیں۔ اس لئے  
 یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر کسی مستوی رقبہ کو دفعہ ۱۱۸ کی طرح حصوں میں  
 تقسیم کیا جائے تو سعت ف (ی) کا تغیر جو اسی جہت میں ی سے  
 مرتسم شدہ تمام جزوی رقبوں کے جواب میں ہے سعت ف (ی)  
 کے اس تغیر کے مساوی ہوگا جو ی سے مرتسم شدہ بیرونی محیط  
 کے جواب میں ہے۔ اب فرض کرو کہ مستوی کا ہا لیں کوئی محیط مرتسم  
 ہوا ہے اور پہلے یہ فرض کرو کہ اس میں ایسا کوئی نقطہ شامل نہیں ہے جو  
 مساوات ف (ی) = ۰ کو پورا کرتا ہو۔ اس کو متعدد چھوٹے رقبوں  
 میں تقسیم کیا جاسکتا ہے جن میں سے ہر ایک کے لئے دفعہ ۱۲۰ کی

صورت (۱) کے نتائج قائم رہتے ہیں اور جو کچھ کہ ابھی ثابت کیا گیا ہے

اُس سے یہ نتیجہ نکلتا

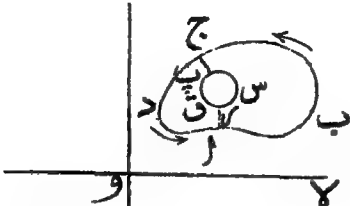
ہے کہ سمت (ی) کا

تغیر جوئی سے مسم

شدہ بند محیط کے جواب

میں ہے کچھ نہیں ہے۔

دوسرے یہ فرض کرو کہ



شکل (۱۱)

بند محیط میں ایسا نقطہ شامل ہے جو سمت (ی) = ۰ کی اصل ہے

اور یہ اصل م مرتبہ تکرار پاتی ہے۔ فرض کرو کہ اس نقطہ کے گرد ایک

چھوٹا بند متغیر (ب) قائم کیا ہے۔ اب سمت (ی)

کی سمت کا تغیر جوئی سے مسم شدہ پورے محیط کے متناظر ہے اسکے

ان تغیرات کے مجموعہ کے مساوی ہے جو رقبوں (ب) ج پ س کا

ج د ا س ق پ ب پ ق کا س کی ترسیم کے متناظر ہیں۔

پہلے دو تغیرات جو کچھ کہ اوپر ثابت ہوا اُس کی وجہ سے معدوم ہو جاتے ہیں

اور آخر کا تغیر دفعہ ۱۲۰ (۲) کی رو سے ۲ م ۲ کے مساوی ہے۔

پس سمت (ی) کا مجموعی تغیر ۲ م ۲ ہے۔ اسی طرح اگر رقبہ میں ایسے

اور نقطے بھی شامل ہوں جو م، م، وغیرہ مرتبہ تکرار پانچوالی اصولوں کے

جواب میں ہیں تو مجموعی تغیر = ۲ (م + م + م + م + م + م) = ۲ م۔ پس اہم

مسئلہ ذیل پر پہنچتے ہیں جو کوششی سے منسوب کیا جاتا ہے:-

ایک دے ہوئے رقبہ کے اندر کسی کثیرالارقام کی اصلوں کی

تعداد، اس کثیرالارقام کی سمت کے مجموعی تغیر کو جو ملف متغیر

سے اُس رقبہ کے محیط کی مکمل ترسیم کے جواب میں ہے ۲۲ سے

تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

۱۲۲۔ عام مساوات کی اصلوں کی تعداد۔ دفعات سابق کے ثابت شدہ اصولوں کی مدد سے ہم وہ مسئلہ ثابت کر سکتے ہیں جس کا ذکر دفعات ۱۵ اور ۱۶ میں کیا گیا تھا یعنی ہرن ویں درجہ کی منطق اور مکملہ مساوات کی ن خیالی یا حقیقی اصلیں ہوتی ہیں۔  
فرض کرو کہ  $y$  کا منطق اور مکملہ تفاعل

ف (ی) =  $y^1 + y^2 + \dots + y^n$  ہے۔ اب سو اس مفروضہ کہ ف (ی) 'متغیر کی کسی لامتناہی قیمتوں کے مجموعہ' نہیں ہو سکتا ف (ی) = کی اصلوں کے وجود کے متعلق کوئی اور مفروضہ اختیار کئے بغیر ہم یہ فرض کر سکتے ہیں کہ  $y$  اپنے مستوی میں اتنا بڑا دائرہ مرسم کرتا ہے کہ اس کے باہر کوئی اصل وجود نہیں رکھتی۔ تب اگر

$$\text{ف (ی)} = y^1 + y^2 + \dots + y^n$$

$$= y^n \text{ 'جہاں } y^1 = \frac{1}{y^{n-1}}$$

تو  $y$  جس کا مقیاس  $y$  کے مقیاس کا متکافی ہے ایک چھوٹا دائرہ مرسم کرے گا جیسے اس مستوی کا ایک ایسا حصہ شامل ہو گا جو  $y$  سے مرسم شدہ دائرہ کے باہر واقع ہو نیوالے ملف متغیر  $y$  کے میدان کے جواب میں ہے اور اس لئے ف (ی) = کی کوئی اصل اس چھوٹے دائرہ کے اندر واقع نہیں ہوگی۔ پس  $y$  سے پورے دائرہ کی ترسیم کے جواب میں ف (ی) کی سمت کا تغیر = اور اس لئے

ف (ی) کی سمت کا تغیر =  $y^n$  کی سمت کا تغیر



اور اگر

$$Y = R(\text{جم طه} + \text{خ جب طه}) \text{ یا } Y = R(\text{جم ن طه} + \text{خ جب ن طه})$$

تو طه بقدر ۲۲ کے بڑھ جاتا ہے اور اس لئے  $Y$  کی سعت بقدر ۲۲ کے بڑھ جاتی ہے۔

اب کوششی کے مسئلہ (دفعہ ۱۲۱) سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ  $Y$  سے مرتسم شدہ دائرہ کے اندر اصولوں کی تعداد یعنی مساوات  $F(Y) =$  کی کل اصولوں کی تعداد  $n$  ہے اور مسئلہ ثابت ہو چکا۔ (26)

اس طرح وہ مسئلہ جس کا ثبوت دفعہ ۱۵ میں ملوثی کر دیا گیا تھا کوششی کے مسئلہ کا نتیجہ صریح ہے۔ اس لئے کوششی کے مسئلہ کو مساواتوں کے نظریہ میں بنیادی مسئلہ قرار دیا جاسکتا ہے۔ تاہم یہ دیکھنا واجب ہے کہ دفعہ ۱۵ کے مسئلہ کو بعض ہر عددی مساوات کی نسبت عددی اہل ہوتی ہے بالراسخت کوششی کے مسئلہ کی مدد کے بغیر ان اصولوں کے ذریعہ ثابت کیا جاسکتا ہے جو دفعہ ۱۱۹ اور دفعات ماقبل میں مذکور ہیں۔ چنانچہ ہم اب اسکو اسی طرح ثابت کرینگے۔

۱۲۳۔ بنیادی مسئلہ کا دوسرا ثبوت۔ اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ  $Y$  کی کوئی قیمت ایسی نہیں ہے جو  $F(Y)$  کو معدوم کرتی ہو۔ اور فرض کرو کہ قیمت  $Y$  جو نقطہ  $\lambda$  سے تعبیر ہوتی ہے (شکل ۱۰) مبداء ہے  $\lambda$  کے قریب ترین ممکن محل  $\lambda$  کے جواب میں ہے۔ اب ہم یہ ثابت کرنا چاہتے ہیں کہ اضافہ کو ایسی سمت دیا جاسکتی ہے کہ  $\lambda$  ایسے محل میں آجائے جو مبداء ہے  $\lambda$  کی بہ نسبت قریب تر ہو۔ ہم حسب ذیل پھیلاؤ جانتے ہیں (دفعہ ۱۱۹)۔:

$$F(Y + h) = F(Y) + F'(Y)h + \frac{F''(Y)}{2}h^2 + \dots + \frac{F^{(n)}(Y)}{n!}h^n$$



حرکت کی سمت کچھ ہی ہو یعنی خواہ سرعت ظہ کچھ ہی ہو وقت  $\Delta t$  و  
کیونکہ  $\Delta t$  میں  $\Delta$  پس ہم نے یہ ثابت کر دیا کہ  $\Delta$  مبدائی  
لحاظ سے  $\Delta$  کا قریب ترین ممکن محل نہیں ہے اور اسی طرح یہ ثابت  
ہو سکتا ہے کہ صفر سے مختلف کوئی اور دوسری قیمت  $f$  (ی) کے  
مقیاس کی کم سے کم ممکن قیمت نہیں ہو سکتی۔

اس ثبوت میں جو اوپر دیا گیا ہے صرف یہ بتایا گیا ہے کہ مساوات  
کی اصل ہونی چاہئے لیکن اصلوں کی ٹھیک تعداد متعین نہیں کی گئی  
جیسا کہ اس ثبوت میں کی گئی ہے جس کا ماخذ کوشی کا مسئلہ ہے۔ تاہم جب  
یہ ثابت کر دیا گیا کہ کم از کم ایک اصل موجود ہونی چاہئے تو ثبوت کی  
تکمیل آسانی کے ساتھ دفعہ ۱۶ کے طریقہ سے ہو سکتی ہے۔

یہ دیکھنا ضروری ہے کہ جب  $\Delta$  کی کسی مخصوص قیمت کیلئے  
 $f$  (ی) معدوم نہیں ہوتا تو  $f$  (ی) کے اضافہ کو  $\Delta$  کے ساتھ  
جو نسبت ہے اس کی انتہائی قیمت مستقل  $f$  (ی)  $\Delta$  (مجموعہ)  
ہے۔ یہ آسانی کے ساتھ ثابت ہو سکتا ہے کہ ان  
دونوں اضافوں کا درمیانی زاویہ مستقل ہوتا ہے اور ان کے مقیاس  
مستقل نسبت رکھتے ہیں۔ اس کو عام طور پر یوں بیان کیا جاتا ہے کہ  
 $\Delta$  اور  $\Delta$  سے منقسم شدہ شکلیں اپنے لائنہاں چھوٹے حصوں میں  
ایک دوسرے کے متشابہ ہیں۔

اس دفعہ کے مضمون پر مزید تحقیق مطلوب ہو تو کتاب کے  
آخر میں نوٹ ج کا مطالعہ کیا جائے۔

۱۲۴۔ ملف عددی اصلوں کی تعیین۔ کبھی کا حل۔

مساواتوں کے نظریہ پر جو تصنیفات موجود ہیں ان میں مساواتوں کی  
ملف عددی اصلوں کو عملی طور پر تعیین کرنے کی طرف بہت کم توجہ  
کی گئی ہے اور نہ یہ آسان ہے کہ ابتدائی درسی کتاب میں جہیں عام

(262)

طریقہ درج ہوں اسکی وضاحت خاطر خواہ کیجا سکے۔ نظری طور پر اس مسئلہ میں کوئی اشکال نہیں کیونکہ اگر ف (لا + خما) کے حقیقی اور خیالی حصے جدا گانہ صفر کے مساوی رکھے جائیں اور محصلہ دو مساواتوں سے کسی ایک متغیر کو ماقط کر دیا جائے تو ایک مساوات حاصل ہوگی جس سے دوسرے متغیر کی حقیقی قیمت ہارنر کے عمل سے محسوب کیجا سکتی ہے۔ لیکن یہ معلوم ہوگا کہ اس طریقہ کی عملی قدر و قیمت کچھ بھی نہیں ہے۔\*

ہم اس دفعہ اور دفعات آئندہ میں اپنی توجہ صرف کعبی اور چار درج مساواتوں تک محدود رکھینگے جن کے سر حقیقی اعداد ہوں۔ ان مثالوں میں صرف اس عمل حسابی کو پیش کیا جائیگا جو عملی مقاصد کے لئے مساوات ترین شکل رکھتا ہے۔ فرض کرو کہ حل کے لئے مساوات

$$ف (لا) = لا^۳ + ف لا^۲ + ق لا + ر = ۰$$

تجویز کی گئی ہے۔ اس کی اصولوں کو ع، ہ، ک، ھ، ک مان لیا جا سکتا ہے جنہیں ع حقیقی ہے اور باقی اصولوں کی نوعیت خود اشنا ہے

\* طالب علم اگر باہرین ریاضی کی ان کوششوں کا مطالعہ کرنا چاہیں جو انہوں نے عددی مساواتوں کی ملف اصولوں کو دریافت کرنے کے لئے کی ہیں تو وہ حسب ذیل کتابوں سے مدد لے سکتے ہیں۔ ۱۔ لکرائج :- مقالہ برائے حل عددی مساوات۔ ۲۔ ٹرنی :- جبری مساواتوں کا نظریہ ۳ :- سائمن سٹینز :- عددی مساواتوں کا عام حل (دس ۱۸۵۱ء)۔ ۴۔ پنی - سی - یلینگ :- اعلیٰ عددی مساواتوں کا حل (مطبوعہ لائپزک ۱۸۶۵ء) ایمری ملیا کلنوک :- وقت واحد میں کسی مساوات کے تمام اصولوں کو دریافت کرنے کا طریقہ - (امریکن جنرل آف سائنس ۱۸۷۷ء جلد ۱۰ شماره ۲۱) ۵۔ ایم - ای - کار والو :- جبری یا ماورائی مساواتوں کا مکمل عددی حل دریافت کرنے کا عملی طریقہ (مطبوعہ پیرس ۱۸۹۶ء)۔

عمل حساب میں معلوم ہو جائے گی کیونکہ ک کی تعیین اس کے مروج سے ہوتی ہے جو ممکن ہے منفی ہو یا مثبت۔ مساوات کی کوئی ابتدائی تحلیل ضروری نہیں۔ اگر لا کی بجائے ۵ + ک درج کیا جائے اور ک کی جفت اور طاق قوتوں کے مجموعوں کو جدا گانہ صفر کے مساوی رکھا جائے (دیکھو مثال ۲۶ صفحہ ۲۲۲) تو ہمیں فوراً ذیل کی مساوات ملجاتی ہے:-

$$ک = ۲ = (۵) = ۳ + ۲ + ۲ + ۵ + ۲$$

نیز ک ساقط کرنے سے ۵ کو متعین کرنے کے لئے ایک کعبی مساوات حاصل ہوتی ہے لیکن اس مساوات کو بنانے کی ضرورت نہیں پڑے گی کیونکہ ۵ کو سب سے زیادہ آسان طریقہ سے مساوات ۵ + ۲ = ۵ - ۲ سے معلوم کیا جاسکتا ہے جبکہ ۵ کو سب سے پہلے ہارنر کے طریقہ سے حسب معمول دریافت کر لیا گیا ہو۔

آخر میں ک کا محسوب کرنا ضروری ہے اور اس کے ساتھ باقی دو اصلوں کا خواہ وہ خیالی ہوں یا حقیقی۔ اس مقصد کیلئے ذیل کا طریق عمل سہولت بخش ہو گا:-

سروں کے رقوم میں ۳ ف (ع) کی قیمت ف - ۳ ق

ہے معنی

$$ف (ع) + ف (۵ + ک) + ف (۵ - ک) = ف - ۳ ق$$

$$ف (۵ + ک) + ف (۵ - ک) = ۲ ف (۵) + ۲ ک$$

$$ف (ع) + ۴ ک = ۲ ف - ۳ ق$$

جس سے ک کو بہت تھوڑی محنت کے ساتھ معلوم کیا جاسکتا ہے کیونکہ ف (ع) کی عددی قیمت ہارنر کے تکمیل یافتہ عمل میں جو آخری احتمال ہے اس میں آخر سے دوسرے سر سے

لکھی جاسکتی ہے۔ باقی دو اصلوں کی نوعیت اس طور پر حاصل شدہ عدد کی علامت پر منحصر ہوگی اور اس عدد کے مثبت اور منفی جذور اخرج لینے سے خود انہیں معلوم ہو جائیں گی۔

## مثالیں

۱۔ مساوت

$$1 + 2 - 3 = 0$$

کو حل کرو۔

سب سے پہلے مثبت حقیقی اصل معلوم کر دو جو ۱۰ کے طریقہ سے چار استخوانوں کو حاصل کرنے سے حاصل ہوگی اور آخری استخوان کے سر ہونگے۔

$$1 + 2 - 3 = 0 \quad 1 + 2 - 3 = 0$$

یہ ذہن نشین رکھو کہ اصلوں کو تین مرتبہ ۱۰ سے ضرب دیا گیا ہے  
ممنوع اور ثابت کے ایک قیمتیں پہلی صورت میں دہائی طرف سے  
بوجہ ہندسے اور دوسری صورت میں چہ ہندسے کو منہ اور علامت غائب  
لگانے سے معلوم کرتے ہیں۔ مثلاً ۱۰ کو ۱۰ سے تقرب کو اور  
دو منسروں سے لہجہ ثابت کے ایک زیادہ صحیح قیمت معلوم کی جائے چنانچہ  
اس نمونہ پر ہم حاصل کرتے ہیں

$$1 + 2 - 3 = 0$$

اسکوف ۱۰ ۲ ۳ کے مساوی ہے جس سے ترقی کرنے سے

$$1 + 2 - 3 = 0$$

اب چونکہ منفی ہے اسلئے یہ ثابت ہو گیا کہ باقی دو اصلیں خیالی  
ہیں۔ عدد کی حاصل شدہ قیمت ۱۰ ۱۳۵ ۵۱ سے ۱۰ کی قیمت فوراً  
۲۰ ۵۶ ۷۲ ۸۶ ۹۶ کو ۱۰ سے غنیمت کرنے اور اسکا  
مربع لینے سے بالآخر مساوات کی ملف اصلیں حاصل ہو جاتی ہیں جو یہ ہیں

T-V-3952P ± 3, 5442-

۲۔ نیوٹن کے کمبی (دیکھو دفعہ ۱۰۷)

$$= 0 - 112 - 11$$

کویوری طرح حل کرو۔

لوپوری طرح کی کرو۔  
 ہارنر کے طریقہ سے چار استیالوں کی تکمیل کرنے اور مثال سابق  
 کی طرح عمل کرنے سے ہم معلوم کرتے ہیں  $e = 9.45 \times 10^{-2}$  اور

فے (ع) = ۱۱۶۰۷۸

۱۶۲۹.۱۹۵- = ک

پس ک<sup>۲</sup> = ۱۹۵.۱۲۹ اور باقی دو اعلیں (جنکا خیالی ہونا ثابت ہے) حاصل ہوتی ہیں

$$\sqrt{151409} \pm 15.444 -$$

۳۔ دفعہ ۱۰۹ صفحہ ۳۴ کی مثال ۱

$$= 1 \dots - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

کی باقی دو اصلیں معلوم کرو۔

اہم حاصل کرتے ہیں

۱۶۵۲۱-۲ = ک، ۶۴۵-۸۴۱ = ف (ع)

اور مطلوبہ اصلیں ہیں

1-10-50 12,444-

۴۔ مساوات

$$= r + \frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{2} r.$$

کہاں کرو۔

۲۰۔ تقسیم کرو اور مساوات لآ۔  $152 \div 8 = 19$ ۔ کی وہ اصل

ہمارے کے طریقہ سے معلوم کرو جو صفر اور ایک کے درمیان واقع ہے

تو معلوم ہوگا کہ عہدہ = ۶۴۶۰۳۶۶ - اور فیہ (عہدہ) = ۶۴۳۶۶ -

اس لئے

۴ک = ۲ف - ۳ق - ۱ف = (-۵)ف = ۱۵۴۴ + ۳۶۴ = ۱۹۰۸ -

پس ک<sup>۲</sup> = ۸۴۱، اور اسلئے یاتی دو اصلیں حقیقی ہیں۔ ہم حاصل کرتے ہیں ۵ = ۶۹۸ + ۳ اور ک کو جمع اور تفریق کرنے سے یہ دوسری اصلیں معلوم ہوتی ہیں ۶۸۶۵ - ۱۵ اور -۶۳۱۴۶۹ - (دیکھو مثال ۱۵ صفحہ ۳۰۲)۔

۵۔ لگراج کے کعبی

$$لا = ۷ + ۷ = ۱۴$$

کو پوری طرح حل کرو۔

تمام اصلوں کی علامتیں بدلوا اور احتمال شدہ مساوات ف (لا) = کی مثبت اصل ۷ معلوم کرو جو ۱۳ اور ۴ کے درمیان ہے تو ۷ = ۳۶۸۹۱۷۳ اور ف (۷) = ۳۷۸۸۷۳۷

پس ک<sup>۲</sup> = ۵۰۲۸۱۵۷۵ اور ک = ۷۱۶۷۸ - نیز ۵ = ۱۵۵۲۴۴۵۸ اور ان سے ۵ + ک اور ۵ - ک کی قیمتیں معلوم ہو جاتی ہیں۔ اس طور پر حاصل کردہ سب اصلوں کی علامتیں بدلنے سے دی ہوئی مساوات کی اصلیں حاصل ہوتی ہیں

-۳۶۸۹۱۷۳، ۱۵۳۵۶۶، ۱۵۶۹۲۲، (دیکھو مثال اوقہ ۱۱)

اوپر جو مثالیں دی گئی ہیں وہ یہ بتانیکے لئے کافی ہیں کہ اصلوں کی نوعیت کی قبل از قبل جانچ کئے بغیر کس طرح دئے ہوئے کعبی کو حل کیا جاسکتا ہے۔ یہ تصدیق کرنے کے لئے کہ کعبی کی دوسری دو اصلیں حقیقی ہیں یا خیالی جو محنت برداشت کرنی پڑتی ہے وہ اس محنت سے کچھ ہی زیادہ ہے جو اسٹرم کے مسئلہ کو استعمال کرنے میں لاحق ہوتی ہے اور وہ مزید محنت جو اصلوں کو واقعی طور پر معلوم کرنے کے لئے ضروری ہے بہت خفیف ہے۔ اب ہم چار درجی مساوات پر غور کریں گے۔

(285)

۱۲۵۔ چار درجی کا حل۔ جب چار درجی کی اصلیں (دو یا چار)

حقیقی ہوں تو اسکو بھی دفعہ ماضی میں بیان کردہ طریقہ کے مشابہ طریقہ سے



حل کیا جاسکتا ہے۔ بعض مثالوں میں حقیقی اصل کے وجود کو فوراً پہچان لیا جاسکتا ہے اور جب ایسی صورت ہو تو مساوات کے مکمل حل مل گئے لئے طریقہ ذیل کا استعمال کرنا فائدہ مند ہوگا۔ فرض کرو کہ مجوزہ مساوات ہے

ف (لا) = لا + ف لا + ق لا + ر لا + س =  
اور اسکی حقیقی اصلیں ہیں عہ، یہ۔ باقی دو اصلوں کو ھ + ک اور ھ - ک سے تعبیر کیا جاسکتا ہے۔ یاد رہے کہ اس آخری زوج کے متعلق کسی قسم کا مفروض اختیار نہیں کیا گیا۔ فرض کرو کہ عہ اور یہ دونوں کو ہارنر کے عمل سے محسوب کر لیا گیا ہے اور ف (عہ) اور ف (یہ) کی عددی قیمتیں بھی دفعہ مابقی کی طرح معلوم کر لی گئی ہیں۔ اب اگر ف (لا) میں لا کی بجائے ھ + ک درج کیا جائے اور مثال ۲۶ صفحہ ۴۲ کا طریق حل استعمال کیا جائے تو بلا تکلف حاصل ہوتا ہے

$$- ک = \frac{ف (ھ) = ۲ ھ + ۳ ف ھ + ۲ ق ھ + ر}{ف + ھ ۲}$$

پھر جیسا کہ ثابت کیا جا چکا ہے

$$ف (عہ) + ف (یہ) + ف (ھ + ک) + ف (ھ - ک)$$

= ف + ۲ ق + ۲ ھ + ۲ ر  
اور اسلئے  
۲ ک = ۲ ھ + ۲ ق + ۲ ھ + ۲ ر = ف (عہ) + ف (یہ) + ف (ھ + ک) + ف (ھ - ک)  
اس ضابطہ کو ک کے محسوب کرنے میں استعمال کیا جاسکتا ہے  
جبکہ ھ کی قیمت پہلے سے ہی مساوات عہ + یہ + ھ = ف سے حاصل کر لی گئی ہو۔ پھر اس کا تصفیہ ہو سکتا ہے کہ اصلوں کا دوسرا زوج خیالی ہے یا حقیقی ہو جب اسکے کہ اسکے منفی ہے یا مثبت۔

مثالیں



$$1-125-39 \pm 132.48$$

۳۔ مساوات

$$2-13-11-19=0$$

کو حل کرو۔  
اسکی دو اصلیں حقیقی ہونی چاہئیں، ایک (ع) مثبت اور دوسری (ب) منفی۔ ۲ سے تقسیم کرو اور مساوات کو اس شکل میں لکھو:-  
ف (لا) = لا<sup>۲</sup> - ۶۵ لا + ۵ لا - ۹۵ = ۰

جب 'ف' (لا) = ۰ کی اصلوں کی علامتوں کو بد لکر، یہ محسوب کر لیا جائے تو ف (ب) کی قیمت معلوم کرنے کے لئے ہارنر کے عمل سے حاصل شدہ آخری استحالہ میں آخر سے جو دوسرا سر ہے اسکی علامت بد لنی چاہئے

$$36-30.55 = 6 \quad 2345-32 = 2$$

$$3264-9 = 3 \quad 26932 = 3 \text{ (ب) } = 26932$$

$$\frac{5643}{15143} = 2 \text{ ک } 2$$

اور خیالی اصلیں ہیں

$$1-15.924 \pm 52866$$

۴۔ مساوات

$$2-80-1998-1493+5000=0$$

کو حل کرو۔  
صریحاً ایک اصل صفر اور ایک کے درمیان ہے اور دوسری کا ۱۲ اور ۱۳ کے درمیان واقع ہونا آسانی کے ساتھ معلوم ہوتا ہے (دیکھو مثال ۴ دفعہ ۹۳)

$$125-5643 = 2 \quad 335-98 = 2$$

$$52866 = 3 \quad 13564 = 3 \text{ (ب) } = 13564$$

$$\frac{41333}{535485} = 2 \text{ ک } 2$$

اسلئے باقی دو اصلیں حقیقی ہیں اور آسانی کے ساتھ معلوم ہوتی ہیں ۲۲-۲۱-۲۰

اور ۲۲ ۸۳ ۳۴ -

اس مساوات کی سب اصلوں کو ینگ نے ہارنر کے طریقہ سے محسوب کیا ہے (دیکھو کعبی اور چار درجی مساواتوں کی تکمیل اور حل صفحہ ۲۱۶ تا ۲۲۱) اور ہم نے آخر میں جو دو اصلیں حاصل کی ہیں وہ ینگ کے حاصل کردہ قیمتوں کے مطابق ہیں۔

۱۲۶۔ چار درجی کا حل (گذشتہ سے پیوستہ) جب چار درجی

کی سب اصلیں خیالی ہوں تو ظاہر ہے کہ دفعہ ماسبق کے حل کا طریقہ ناکام رہتا ہے۔ اس صورت میں اور عموماً اصلوں کی نوعیت خواہ کچھ ہی ہو طریقہ ذیل استعمال کیا جاسکتا ہے :-

فرض کرو کہ مساوات سب سے پہلے اسکی دوسری رقم کو خارج کر دینکے بعد شکل ذیل میں لکھی گئی ہے۔

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

اسکی اصلوں کو  $h \pm k$ ،  $h \pm k'$ ،  $h \pm k''$ ،  $h \pm k'''$  قرار دیا جاسکتا ہے۔ یہاں اصلوں کی نوعیت کے متعلق کوئی مفروض اختیار نہیں کیا گیا ہے۔ انہی نوعیت  $k$  اور  $k'$  کو محسوب کر لینے کے بعد انکی علامتوں پر منحصر ہوگی۔ لاکر بجائے  $h + k$  درج کرنے اور پہلے کی طرح حل کرنے سے

$$k^2 = \frac{f(h) \cdot f(h')}{(h-h')^2} = \frac{f(h) \cdot f(h')}{(h-h')^2}$$

$$-k^2 = \frac{f(h) \cdot f(h')}{(h-h')^2} = \frac{f(h) \cdot f(h')}{(h-h')^2}$$

جس سے  $k$  معلوم ہوتا ہے جبکہ  $h$ ، معلوم ہو جائے۔  $k$  کو جب مثال ۲۶ صفحہ (۲۲۴) کی دو مساواتوں سے ساقط کیا جاتا ہے تو



اور ہارنر کے عمل سے اسکی مثبت اصل  $1.82 \times 10^{33}$  ہے۔ پس  $h^2$  کی قیمت معلوم ہو جاتی ہے اور اس سے  $h = \pm 1.2589$  پھر ہم حاصل کرتے ہیں  $\frac{1}{h} = \pm 0.7943$  ہو جب اسکے کہ  $h$  کی علامت مثبت یا منفی استعمال کی گئی ہو۔ ہر صورت میں جذر المربع کے تحت جو مقدار ہے وہ منفی ہے اور اس لئے سب اصلیں خیالی ہیں۔ ان کو آسانی کے ساتھ معلوم کیا جاسکتا ہے اور وہ یہ ہیں

$$1.2589 \pm 0.3352i, -1.2589 \pm 0.3352i, 1.2589 \pm 0.3352i$$

۲۔ مساوات

$$x^4 + 9x^2 - 5 = 0$$

کو حل کرو۔

اس مساوات پر اسپٹزر (Spitzer) نے بحث کی ہے  
(Allgemeine Auflosung der Zahlen-

Gleichungen. p. 15.)

جسکی مثبت اصل  $1.519229$  ہے۔ پس  $h = \pm 0.6594$  اور اسلئے  $\frac{1}{h} = \pm 1.519229$  اور ہر صورت میں خواہ  $h$  کو مثبت لیا جائے یا منفی، جذر المربع کے تحت جو مقدار ہے وہ منفی ہے اور اسلئے

سب اصلیں خیالی ہیں۔ یہ چار اصلیں ہیں

$$1.519229 \pm 0.3352i, -1.519229 \pm 0.3352i, 1.519229 \pm 0.3352i$$

۳۔ مساوات

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 0$$

کو حل کرو۔

دوسری رقم کے اخراج کے لئے اصولوں کو ۲ سے ضرب دو اور پھر ان کو بقدر ایک کے گھٹاؤ۔ احتمال شدہ مساوات کا محول کبھی آسانی کے ساتھ

حاصل ہوتا ہے

۲۔ ۶۸ + ۳۲۰ - ۲۵۶ = ۰ کی  
اسکی اصلوں کو ۱۰ سے تقسیم کرو اور معلوم کرو کہ استعمال شدہ مساوات  
ایک اصل ۶ اور ۷ کے درمیان ہے جو ہارنر کے عمل سے حاصل ہوتی  
ہے ۶۵۲۹۸۳۸ - پس ۴ ھ = ۶۲۵۹۸۳۸ اور ۵ ھ = ۳۵۹۶۸ ±  
اب خواہ ھ کو مثبت لیا جائے یا منفی یہ معلوم ہوتا ہے کہ جذر الطربیع  
کے تحت جو مقدار ہے وہ مثبت عدد ہے اور اسلئے اس صورت میں  
تمام اصلیں حقیقی ہیں۔ چنانچہ ہم معلوم کرتے ہیں ۴ ک = ۰۴۸۴۰ - اور  
۴ ک = ۰۶۹۸۴۰ - پس ۵ ک = ۰۴۵۱۵ اور ۶ ک = ۰۵۴۹۶ ±  
اب دوسری رقم کو خارج کرنے میں جو دو استعمالے عمل میں لائے گئے تھے  
ان کو حساب میں شامل کر لینے سے مطلوبہ اصلیں حاصل ہوتی ہیں

۳۲ ۶۵۲۳۶ - ۵۴۳۲ - ۲۵۲۳۶ - ۲۵۲۳۶  
اس نتیجہ کی آسانی کے ساتھ تصدیق ہو سکتی ہے کیونکہ یہ دیا ہوا  
تفاعل اجزائے ضربی لا - ۵ اور لا - ۲ کا حاصل ضرب ہے (مثال  
۵ صفحہ ۳۱۴) کے ساتھ مقابلہ کرو۔

۴ - مساوات

$$لا - ۵ لا + ۵ لا - ۵ لا + ۵ لا = ۰$$

کو حل کرو۔

اس مثال پر جلینک (Jelinek) نے بحث کی ہے

Die Aufösung höheren numerische Gleichungen, P. 29  
کرنے کے لیے اصلوں کو ۴ سے ضرب دو اور پھر بقدر ۷ کے گھٹاؤ۔ اس طریقہ سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$لا - ۱۸۲ لا - ۱۶۲۴ لا - ۳۰۵۹ = ۰$$

جسکا محمول کبھی ہے

۲۔ ۲۶۳۷۰ + ۶۴۵۳۶۰ - ۲۶۳۷۰ = ۰  
اسکی مثبت اصل کا محل کرنے کے لئے اصلوں کو ۱۰ سے تقسیم کرنا بہتر ہوگا

جس سے استحالہ مساوات کی ایک اصل کا ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہونا معلوم ہو جائیگا۔ ہارنر کے عمل سے یہ اصل حاصل ہوتی ہے ۵۹۱-۲۲- اسلئے  
 ۷ھ = ۵۹۱-۲ اور ۷ھ = ۱۷۱۷- اب اگر ۷ھ کو مثبت لیا جائے  
 تو جذر المربع کے تحت جو مقدار ہے وہ مثبت ہے اور اس لئے دو اصلیں  
 حقیقی ہیں۔ اگر ۷ھ کو منفی لیا جائے تو جذر المربع کے تحت کی مقدار منفی  
 ہے اور اسلئے دو اصلیں خیالی ہیں۔ پس دوسری رقم کو خارج کر نیکے لئے  
 جو دو استحالے عمل میں لائے گئے ان کو حساب میں شامل کر لینے کے بعد  
 مجوزہ مساوات کی چاروں اصلیں حسب ذیل حاصل ہوتی ہیں

$$۵۹۹۳-۱۱۰۹۱-۱۱۰۳۲-۱۱۰۳۳-۱۱۰۳۳$$

۵- مساوات

$$۸-۸+۱۹۹۸-۱۱۹۲۷-۱۱۹۲۷+۵۰۰۰=$$

کو حل کرو۔ یہ تنگ کی مساوات ہے جسکو دفعہ مابقی میں حل کیا گیا تھا۔ ہم  
 اسکے حل کو اس دفعہ کے طریقہ سے مکرر معلوم کرتے ہیں تاکہ طالب علم کو  
 اس محنت کا اندازہ ہو جائے جو دونوں طریقوں میں کرنی پڑتی ہے جب  
 دوسری رقم آسانی کے ساتھ جدا ہو جائے (جیسا کہ اس مثال میں) یا  
 جب دوسری رقم خود مساوات میں موجود نہ ہو تو یہ معلوم ہو گا کہ دفعہ  
 ہذا کا طریقہ دفعہ مابقی کے طریقہ سے زیادہ آسان ہے۔ اصلوں کو بقدر  
 ۲۰ کے گھٹانے سے استحالہ شدہ مساوات ہے

$$۲-۲+۹۸۳-۲۵۴۶-۲۵۴۶=$$

جسکا محول کبھی ہے

$$۲-۲+۸۰۴+۶۲-۵۹-۹۶۶۲۸۹=$$

ہارنر کے عمل سے ۷ھ = ۳۸-۲۳۶۱ اور اس لئے  
 ۵ھ = ۱۳۶۲۷۲۲± کی علامت کچھ ہی ہو جذر المربع کے تحت  
 کی مقدار مثبت ہے اور اسلئے چاروں اصلیں حقیقی ہیں جسکو معلوم کر نیکے لئے





71)

## نوٹ (۱)

### مساواتوں کا جبری حل

مساوات درجہ دوم کا حل عربوں کو معلوم تھا چنانچہ محمد بن ہونی اور نویں صدی کے دیگر مصنفین کی تصنیفات میں اس کا ذکر موجود ہے۔ عمر خیام کا ایک مقالہ جبر و مقابلہ کے مضمون پر اس وقت موجود ہے جو شاید گیارہویں صدی کے وسط میں تحریر کیا گیا تھا۔ اس میں سمعی مساواتوں کی جماعت بندی ہندسی عمل کے طریقوں کے ساتھ مل گئی ہے لیکن عام حل حاصل کرنے کی کوئی کوشش نہیں کی گئی۔ تیرہویں صدی کے شروع میں لیونارڈو (مقام بنی سا کا بائندہ) نے عربوں سے اس مضمون کی تحصیل کی اور اس کو اُلمی میں منتقل کیا اور اس وقت سے ایک عرصہ دراز تک اُلمی واسے اس علم کے سرپرست رہے۔ لوکس پیا سولیس نے (جو لوکس ڈی برگو کے نام سے مشہور ہے) ایک کتاب "L'Arte Maggiore" کے نام سے ۱۴۹۴ء میں شائع کی۔ اس نے کسی مساواتوں میں عربوں کی جماعت بندی کا متبع کیا اور یہ رائے ظاہر کی کہ اس علم کی موجودہ حالت کا لحاظ کرتے انکاحل حاصل کرنا اتنا ہی ناممکن ہے جتنا دائرہ کی تزییع کرنا۔ لیکن اس کے ساتھ ہی وہ اس بات کا بھی اشارہ کرتا ہے کہ اس علم کی ترقی میں سب سے پہلا مسئلہ یہی ہو گا جس کی طرف علماء ریاضی کی توجہ منعطف ہوگی۔ مساوات  $لا + م = ن$  کا حل سیسٹو فیرو (Scipio Ferreo) نے معلوم کیا لیکن اُس کے انکشاف کا حل کسی کو معلوم نہ ہو سکا سو اُسے اس بات کے کہ اُس نے اپنے طالب علم

فلاریڈو کو ۱۵۰۵ء میں اس حل سے آگاہ کیا۔ ٹارٹاگلیا (Tartaglia) کی توجہ اس مسئلہ کی طرف ۱۵۳۳ء میں منططف ہوئی اور وہ بھی اس اس وجہ سے کہ کولا (colla.) نے ایک ایسا مسئلہ تجویز کیا تھا جس کا حل  $لا + ف = لا = ق$  کی شکل کی کئی مساوات پر منحصر تھا۔ فلاریڈو کو جب اس بات کا علم ہوا کہ ٹارٹاگلیا نے اس مساوات کا حل حاصل کر لیا ہے تو اس نے  $لا + م = لا = ن$  کی شکل کی کئی مساوات کے حل کا جو اسکو معلوم تھا اعلان کر دیا۔ ٹارٹاگلیا کو اس کے بیان کی صداقت پر شبہ ہوا اور اس ۱۵۳۵ء میں اسکو دعوت مقابلہ دیدی اور اس اثنا میں خود بھی  $لا + م = لا = ن$  کا حل دریافت کر لیا۔ یہ حل لا کی بجائے

(272)

نات - ۳۰ فرض کرنے پر منحصر ہے جو دو جذرا لکعبوں کے فرق پر مشتمل ہے۔ کارڈن کے نام سے جو حل منسوب کیا جاتا ہے وہ دراصل اسی حل کی بنیاد پر قائم کیا گیا ہے۔ ٹارٹاگلیا نے اپنی سعی کو جاری رکھا اور مختلف شکل کی کئی مساواتوں کو جو عرب مصنفین کی تقسیم کے تحت آتی تھیں حل کر نیکے لئے قوانین دریافت کئے۔ کارڈن نے جو ان قوانین کو حاصل کرنے کی فکر میں تھا ٹارٹاگلیا سے درخواست کی مگر ناکام رہا۔ آخر بہت کچھ مہنت سماجت کے بعد ٹارٹاگلیا رضی ہوا اور اس نے ان قوانین کی تقسیم کی مگر ساتھ ہی کارڈن سے وعدہ لے لیا کہ وہ اس کو اپنے سینہ میں راز کے طور پر محفوظ رکھگا اور کسی کو اسکا علم نہ ہونے دیگا۔ اپنے وعدہ کو بالائے طاق رکھکر کارڈن نے ٹارٹاگلیا کے قوانین کو اپنی عظیم الشان تصنیف "Ars Magna" میں ۱۵۴۵ء میں شائع کر دیا حالانکہ ٹارٹاگلیا کا ارادہ تھا کہ وہ ان کو اپنی تصنیف میں شائع کرے گا۔ اس نے اپنی تصنیف کی ابتدا ۱۵۵۶ء میں کی لیکن ۱۵۵۹ء میں کئی مساواتوں کی بحث پر پہنچنے سے پہلے ہی انتقال کر گیا۔ اب چونکہ اس کی تصنیف میں اس کے دریافت کردہ قوانین کا

ذکر موجود نہ تھا یہ تو انین امتداد زبانہ کی باعث کارڈن سے منسوب  
کئے جانے لگے اور ان کے انکشاف کا سہرا اسی کے سر باندھ دیا گیا۔  
ظاہر ہے کہ اسکے بعد علماء جبر و مقابلہ کی توجہ فطرتاً درجہ چہارم  
کی مساواتوں کے حل کی طرف منقطعت ہوئی اور یہاں بھی کو لا ہی اسکا  
باعث ہوا کیونکہ اس نے مساوات

$$لا + ۶ = لا + ۳۶ = ۶۰ لا$$

کو حاصل کرنے کی تجویز اُس وقت کے علماء کے سامنے پیش کی۔  
کارڈن نے اس قسم کی مساواتوں کے لئے ایک ضابطہ حاصل کر نیکی  
سچی کی لیکن اسکا انکشاف اس کے طالب علم فیاری (Ferrari)  
کی قسمت میں تھا۔ فیاری نے جو طریقہ استعمال کیا تھا وہ ایک استحالہ  
پر مبنی ہے جس سے مساوات کی طرفین کامل مربع بن جاتی ہیں۔ اس میں ایک نئی  
مقدار داخل کی جاتی ہے جو خود ایک نمبر کے درجہ کی مساوات سے  
متعین ہوتی ہے۔ یہ فی الحقیقت خاصیت میں دفعہ ۶۳ کا طریقہ  
ہے اور اس کو بعض اوقات بومیلی (Bombelli) سے منسوب کیا جاتا  
ہے جس نے اسکو اپنے مقالہ جبر و مقابلہ میں ۱۵۴۹ء میں شائع کیا۔  
سمن کے نام سے جو حل مشہور ہے وہ اگرچہ بہت بعد (تقریباً ۱۵۷۰ء میں)  
شائع ہوا لیکن اصولاً کسی سال میں بھی فیاری کے حل سے مختلف نہیں  
ہے۔ ۱۵۷۰ء میں ڈیکارٹ کا شہرہ آفاق رسالہ شائع ہوا جس میں علم  
جبر و مقابلہ کی بہت سی ترمیمات و اصلاحات درج ہیں۔ ان میں سے  
قابل ذکر یہ ہیں، مساواتوں کی منتفی اور خیالی اصولوں کی جانچ اور اس کا  
علامتوں کا قانون۔ چار درجہ کو دو دو درجہ اجزاء کے حاصل ضرب  
کی شکل میں بیان کرنا اگرچہ فیاری کی شکل سے آسانی کے ساتھ اخذ  
ہو سکتا ہے تاہم چار درجہ کے حل میں قابل قدر اضافہ ہے۔ یور کا  
جبر و مقابلہ ۱۵۷۰ء میں شائع ہوا۔ اس نے چار درجہ کا جو حل پیش  
کیا ہے (دیکھو دفعہ ۶۱) وہ اس لحاظ سے اہم ہے کہ اس کی شکل اور

کبھی کے حل کی شکل میں تطابق اور تشابہ پایا جاتا ہے کیونکہ دونوں صورتوں میں اصل کے لئے غیر منطوق جملہ فرض کر کے مساواتوں کو حل کیا جاتا ہے ڈیکارٹ اور پولر کے طریقے ان کو مشقوں کا نتیجہ ہیں جو انہوں نے مساواتوں کا عام جبری حل دریافت کرنے میں کی تھیں۔ انھارویں صدی میں علماء ریاضی نے اس مسئلہ پر بہت زور لگایا اور بڑی چھان بین کی مگر چوتھے درجہ سے اعلیٰ تر درجوں کی مساواتوں کی صورت میں انکی محنت کامیاب نہیں ہوئی۔

کبھی اور چار درجی کے جو حل علماء قدیم نے حاصل کئے انہیں دو جداگانہ طریقے ہمارے مشاہدہ میں آتے ہیں۔ پہلا وہ ہے جو ٹائیگلیا اور پولر کے مفروضات پر مبنی ہے اور جس کی ابتدا اصل کیلئے ایک غیر منطوق تصریحی شکل اختیار کرنے سے ہوتی ہے۔ دوسرا وہ ہے جس میں دئے ہوئے تفاعل کے ایک استحالہ کی مدد سے اس بات کا کھوج لگایا جاتا ہے کہ آیا اس کے اجزائے ضربی کی نوعیت بدلی جاسکتی ہے تاکہ وہ ایسی شکل میں تحویل ہو جائے جو آسانی سے تحلیل ہو سکے۔ دفعہ ۵۵ میں یہ دونوں طریقے بیان کر دئے گئے ہیں اور ان کے ساتھ ایک تیسرے کا بھی ذکر کیا گیا ہے جسکو وائڈرمنڈ اور لگرائج نے دریافت کیا تھا۔ انہوں نے اپنی تحقیقاتوں کو اُسی زمانہ میں شائع کیا تھا یعنی سن ۱۷۷۱ء اور سن ۱۷۷۲ء میں۔ ان میں سے وائڈرمنڈ ہی پہلا شخص تھا جس نے کسی مساوات کے جبری حل کی ضرورت خاصیت کو صاف طور پر واضح کیا جو یہ ہے کہ کسی مساوات کا جبری حل جذری علامات (جو اس میں شامل ہوتی ہیں) کے اجتماع کی وجہ سے اتمام اصولوں کو بلا امتیاز تعبیر کرنا چاہئے جبکہ اس میں شامل ہونے والے سروں کے تفاعلوں کی بجائے اصولوں کے متشاکل تفاعل درج کئے جائیں (دیکھو دفعہ ۱۰۱)۔ کبھی اور چار درجی کی صورتوں میں اس نوعیت کے ضابطے حاصل کرنے میں اس کی کوششیں بار آور ہوئیں لیکن

پانچ درجی کی صورت میں ناکام رہیں۔ لگرائج نے اپنے پیش روؤں کی محنتوں کو جو مساواتوں کا عام حل دریافت کرنے میں صرف ہوا تھا انھیں اکٹھا کرنے اور ان پر نظر ثانی کرنے کا بیڑا اٹھایا اور ان سب کے نتیجوں کو ایک یکساں اصول میں منسلک کیا۔ یہ اصول اس بات پر مشتمل ہے کہ دی ہوئی مساوات کے حل کو ایک ایسی مساوات کے حل میں تبدیل کیا جائے جس کا درجہ دی ہوئی مساوات کے درجہ سے کم ہو اور جس کی اصلیں دی ہوئی مساوات کی اصلوں اور اکائی کے جذروں کے خطی تغاقل ہوں۔ وہ یہ بھی ثابت کرتا ہے کہ پانچ درجی کو اس طرح تبدیل نہیں کیا جاسکتا کیونکہ وہ مساوات جس پر اس کا حل منحصر ہوتا ہے چھٹے درجہ کی مساوات ہے۔

اب چونکہ پانچویں درجہ کی مساوات کو حل کرنے کی تمام کوششیں رائیگاں گئیں اسلئے علماء ریاضی کے دلوں میں فطرتاً یہ سوال پیدا ہوا کہ آیا اس کا حل ممکن بھی ہے۔ چنانچہ اہل اور دانشور نے شہرت کر دیا (دیکھو سپرٹ کی تصنیف Cours L'Algebre Superieure) کہ جو سب سے اعلیٰ تر درجہ کی مساوات کو جس کی شکل پر کوئی قید نہ ہو حل کر لینا ناممکن ہے۔ تاہم ایم۔ ہیرمانٹ نے پانچ درجی کا ایک ماورائی حل دیا ہے جس کی شکل میں ناقصی تکملہ شامل ہوتے ہیں۔ لگرائج کی تحقیقاتوں کے بعد سے پانچ درجی کی بحث میں جو دوسرے اضافے ہوئے ہیں ان میں سے اہم ایک یہ ہے کہ اسکو رسمی شکل میں (شیرن ہاسن کے) استعمال کی مدد سے بیان کیا جاسکتا ہے۔ شیرن ہاسن خود بھی ۱۶۸۳ء میں 
$$x^5 + px + q = 0$$
 کے مفروضہ کی مدد سے کبھی اور چار درجی کو تبدیل کرنے میں کامیاب ہوا تھا اور قیاس لگایا تھا کہ اسی قسم کا عمل عام مساوات پر بھی استعمال ہو سکتا ہے۔ پانچ درجی کی متذکرہ بالا رسمی تبدیل کو مشر جیرارڈ نے میتھیماٹیکل ریسرچ ۱۸۲۲ء ۳۵ میں شائع کیا اور ایم۔ ہیرمانٹ کا بیان ہے کہ پانچ درجی کی بحث میں یہ تبدیل اہم ترین اضافہ

خصوصاً ایسی صورت میں جبکہ ایل نے یہ ثابت کر دیا تھا کہ اسکا حل ناممکن ہے۔ ایک مقالہ میں جس کو رابرٹ ہارلی نے کوارٹری جرنل آف میٹھامیٹکس حصہ ششم صفحہ ۳۸ میں شائع کیا تھا اس بات کو ثابت کیا ہے کہ یہ تحویل پہلے ہی اعلیٰ میں آچکی تھی کیونکہ اسکو سویدن کے ریاضی دان بزنک نے ۱۷۷۱ء میں حاصل کیا تھا۔ ڈاکٹر سلوٹر کا استعمال بھی بہت اہم ہے جس کے ذریعہ سے پانچ درجی کو تین پانچویں درجہ والی رقموں کے مجموعہ کے طور پر بیان کیا جاتا ہے۔ یہ ایسی شکل ہے جو پانچ درجی کو استعمال کرنے میں بڑی سہولت پیدا کرتی ہے۔ پانچ یا اس سے زیادہ درجہ والی مساواتوں کی بحث میں جو اور اصناف نے زمانہ حال میں ہوئے ہیں وہ زیادہ تر ان اشکال کے ہم متغیروں اور غیر متغیروں سے متعلق ہیں۔ ان تحقیقاتوں کا کچھ ذکر اس تصنیف کی دوسری جلد میں ہے لیکن اور زیادہ تحقیق سے کام لینا ہے تو

طالب علم کو Clebsch کی "Theorie der binären algebraischen

اور سامن کی "Lessour Introductory to the Modern Higher

Algebra کا مطالعہ کرنا چاہیئے۔





۱۰۸۱۔۷)۔ ویٹیا کے بعد سے جو کچھ اس طریقہ میں اضافہ ہوا ہے وہ صرف عمل حساب کو اس طور پر ترتیب دینا ہے کہ اصل کے معلوم کرنے میں صحت اور آسانی پیدا ہو جائے ورنہ اصولاً کوئی اختلاف نہیں ہے۔ اس باب میں کس قدر بڑی ترقی ہوئی ہے اس کا اندازہ مانٹوکلا (Montucla) کے بیان سے بخوبی ہو سکتا ہے جو اس کی تصنیف

تاریخ ریاضیات (Histoire des Math. جلد اول صفحہ ۶۰۳ میں درج ہے۔ ویٹیا کے طریقہ تقرب پر بحث کرتے ہوئے وہ کہتا ہے کہ چار درجہ کی اصل کو اعشاریہ کے گیارہ مقامات تک معلوم کر کے کاغذی حساب (جسکو ویالس (Wallis) نے پورا کیا) از حد صبر آزما کام ہے۔ لیکن اب وہی عمل حساب بہت آسانی کے ساتھ ہر وہ شخص کر سکتا ہے جس نے ہارنر کے طریقہ میں مہارت حاصل کی ہو۔

نیوٹن کا تقرب کا طریقہ ۱۶۶۹ء میں شائع ہوا لیکن اس کے قبل ویٹیا کا طریقہ استعمال کیا جاتا تھا جسکو ہپاریو، آٹریڈ، بیل اور دوسروں نے کچھ آسان بنا دیا تھا۔ نیوٹن کے بعد سمپسن اور برنولی نے خود کو اس مسئلہ کی طرف متوجہ کیا۔ چنانچہ اس کا نتیجہ یہ ہوا کہ ڈینیئل برنولی مساوات کی اصل کو متوالی سلسلہ کی شکل میں بیان کرنے میں کامیاب ہوا اور یولر نے بھی اصل کے لئے اسی قسم کا جملہ حاصل کیا۔ لیکن یہ دونوں طریقے لگراج کے بیان کی بموجب اسی طرح بھی نیوٹن کے حل سے اصولاً مختلف نہیں ہیں۔

(276)

پس لگراج کے زمانہ تک عددی مساوات کی اصل کو تقریبی طور پر حاصل کرنے کا صرف ایک طریقہ تھا اور یہ طریقہ جسکو بالا خر ہارنر نے مکمل کیا اتنا ہی بہترین طریقہ جلا آتا ہے۔ لگراج نے کتاب محلولہ بالا میں نیوٹن اور ویٹیا کے طریقوں کے نقائص کو واضح کیا ہے۔ ویٹیا کے طریقہ کا حوالہ دیتے ہوئے وہ کہتا ہے کہ اس میں بہت سی آزمائشوں کا سامنا کرنا پڑتا ہے اور

اس پر اعتماد نہیں کیا جاسکتا جب تک کہ مساوات  $f = q$  کی دائیں جانب کی تمام رقیعیں مثبت نہ ہوں۔ نیوٹن کے طریقہ میں وہ یہ تقاضا بتاتا ہے:۔ اول، اس سے متوافق اصل محدود رقیعوں میں حاصل ہو نہیں سکتی۔ دوم، عمل میں یہ خوف کہ کہیں ہر نئی تصحیح درست ہے یا نہیں۔ بالآخر اس مساوات کی صورت میں اس طریقہ کی ناکامی جسکی اسلین تقریباً مساوی ہوں۔

لگرنج نے جس مسئلہ کو اپنے لئے پیش کیا وہ یہ تھا:۔  
”اگر ایک عددی مساوات دی گئی ہو جس کی اصلوں کی نوعیت اور قیمتوں کے متعلق پہلے سے کچھ بھی معلوم نہیں ہے تو ان اصلوں کی ممکن ہو تو ٹھیک ٹھیک قیمت دریافت کرنا یا ہر اصل کی تقریبی قیمت تقرب کے مطلوبہ درجہ تک معلوم کرنا۔“

اس مسئلہ کو اس نے حل کرنے کی جو کوشش کی ہے اسکا ذکر کرنے سے پیشتر یہ دیکھنا ضروری ہے کہ متذکرہ بالا تقرب کے طریقوں کے علاوہ اس سمت میں کونسی باتیں معلوم ہو چکی تھیں۔ ہیریٹ نے ۱۶۳۱ء میں مساوات کی ترکیب کو اجزاء ضروری کے حاصل ضرب کی صورت میں معلوم کیا تھا اور وہ روابط دریافت کر لئے تھے جو اصلوں اور سروں کے درمیان ہیں۔ وہیٹا نے مجموعی صورت میں ان روابط کو اس سے پہلے معلوم کیا تھا لیکن وہ عام صورت میں کوئی ایسا نتیجہ اخذ نہ کر سکا جیسا کہ ہیریٹ نے حاصل کیا۔ یہ انکشاف اہم تھا کیونکہ اس سے اس بات کا پتہ چلا کہ صحیح اصل کو مساوات کی مطلق رقم کا جزو ضروری ہونا چاہئے اور انیسی اصلوں کو متعین کرنے کے لئے نیوٹن کا مقسوم علیہم کا طریقہ اسکا لازمی نتیجہ صریح تھا۔ پس اصلوں کے حدود معلوم کرنے کی طرف علماء ریاضی کی توجہ منعطف ہوئی تاکہ مقسوم علیہم کے طریقہ اور تقرب کے دوسرے موجودہ طریقوں میں جو محنت کرنی پڑتی تھی وہ کم ہو جائے جیسا کہ پہلے بیان کر دیا گیا ہے ڈیکارٹ پہلا

شخص تھا جس نے مساواتوں کی منفی اور خیالی اصولوں کو پہچانتے کے لئے ایک معیار دریافت کیا۔ نرسسی دی ہوئی مساوات کی حقیقی اور خیالی اصولوں کی تعداد متعین کرنے کے متعلق جس تحقیق کی اس نے ابتدا کی اسکو اسٹرٹنگ ڈی گوا، اور دوسرے علماء نے جاری رکھا۔

لگرنج نے غور کیا کہ متدکرہ صدر مسئلہ کو حل کرنے میں سب سے پہلے دی ہوئی مساوات کی حقیقی اصولوں کی تعداد متعین کرنا اور انکو ایک دوسرے سے جدا کرنا ضروری ہے۔ اس مقصد کے لئے اس نے اس مساوات کا استعمال کرنا تجویز کیا جس کی اصلیں دی ہوئی مساوات کی اصولوں کے فرقوں کے مربع ہوں۔ ورنہ اس نے اس سے پہلے ہی اصولوں کو جدا کر نیکیا یہ طریقہ ظاہر کیا تھا لیکن لگرنج کا بیان ہے [عددی مساواتیں نوٹ سوم] کہ حقیقت وہ اس مضمون پر اپنی یادداشت لکھ رہا تھا وہ ویرنگ کی تحقیقاتوں سے ناواقف تھا اب یہ ظاہر ہے کہ جب فرقوں کی مساوات بنجانی ہے تو اسکی مثبت اصولوں کی سفلی حد معلوم کر کے وہ عدد معلوم کرنا ممکن ہے جو دی ہوئی مساوات کی اصولوں کے فرقوں میں سے سب سے چھوٹے فرق سے کم ہو۔ پھر علی التواتر ان عددوں کو درج کرنے سے جو اس مقدار سے نحوڑا فرق رکھیں دی ہوئی مساوات کی اصلوں کو جدا کیا جاسکتا ہے۔ جب اس طور پر اصلیں جدا ہو جائیں تو لگرنج کی تجویز ہے کہ انہیں سے ہر ایک کو مسلسل کسور کے طریقہ سے جسمانی تشریح اس کتاب میں (صفحہ ۱۱۲) کر دینی ہے معلوم کیا جائے۔ اصولوں کو معلوم کر نیکیا یہ طریقہ اس اعتراض سے بچ جاتا ہے جو نیوٹن کے متدکرہ بالا طریقہ پر وارد ہوتا تھا چنانچہ اس طریقہ سے ہر تقریب میں خطا کی مقدار معلوم ہوتی ہے اور جب اصل متوافق ہو تو عمل خود بخود رک جاتا ہے اور اصل محدود شکل میں معلوم ہوتی ہے۔ لگرنج نے مساواتوں کی خیالی اصولوں کو حاصل کرنے کے طریقے بھی دئے ہیں اور یہ بھی بتایا ہے کہ اگر مساوات میں

مساوی اصلیں ہوں تو انکو سب سے پہلے موجودہ طریقوں سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

نظری طور پر لگراچ نے اپنے لئے جو مسئلہ تجویز کیا تھا اس کا حل متذکرہ بالا تحریر کی روش سے مکمل ہے۔ لیکن عملی طور پر جہاں تک اسکا تعلق ہے وہ محض بیکار ہے۔ کیونکہ جو تھے درجہ کی مساوات کے لئے ہی فرقوں کی مساوات بنانا بہت محنت طلب ہے اور اعلیٰ تر درجہ کی مساواتوں کے لئے قریب قریب ناممکن العمل۔ اگر ہم اصلوں کو جد کر نیکے وہ آسان ترین طریقے بھی لگراچ کے بقیہ عمل کے ساتھ کام لائیں جو لگراچ کے بعد معلوم کئے گئے ہیں تو بھی اس عمل پر یہ اعتراض وارد ہوتا ہے کہ اس سے اصل مسلسل کسر کی شکل میں حاصل ہوتی ہے اور اسکو اس شکل میں حاصل کرنے کے لئے جو محنت درکار ہے وہ اس محنت سے کہیں زیادہ ہے جو اصل کو اعشاری شکل میں حاصل کر نیکے لئے ہارنر کے عمل میں کرنی پڑتی ہے۔ یہ بھی ظاہر ہے کہ یہ آخر الذکر عمل اس مکمل شکل میں جسکو ہارنر نے پیش کیا ہے ان تمام اعتراضات سے بری ہے جو نیوٹن کے طریقہ پر وارد ہوئے ہیں۔

لگراچ کے بعد ویٹیا اور نیوٹن کے تقرب کے طریقوں میں ہارنر کی ترمیم کے علاوہ عددی مساواتوں کی تحلیل میں فوریر، بوڈان اور اسٹرم نے نہایت اہم اضافے کئے ہیں۔ بوڈان کی تحقیقات ۱۸۰۰ء میں شائع ہوئی اور فوریر کی اسکے انتقال کے بعد ۱۸۳۱ء میں اس میں شک نہیں کہ بوڈان کی تصنیف سے پہلے ہی فوریر نے وہ مسئلہ معلوم کر لیا تھا جو اس کتاب میں ایک ساتھ دونوں کے نام سے موسوم کیا گیا ہے۔ اسٹرم کی تحقیقات ۱۸۳۵ء میں شائع ہوئی۔ ان مصنفین نے اصلوں کو جد کر نیکے جو طریقے بیان کئے ہیں انکو پوری طرح اس کتاب میں واضح کیا گیا ہے (دسواں باب)۔ (ان طریقوں کو ہارنر کے طریقہ کے ساتھ شامل کرنے سے ہمیں لگراچ کے مسئلہ کا وہ حل ملجاتا ہے جو خود لگراچ کے

مجوزہ حل سے ہیں زیادہ آسان ہے۔ نیز اس سمت میں اس سے زیادہ سہولت پیدا کرنا ناممکن نظر آتا ہے۔ مساوات کی اصل دریافت کرینیس محنت سے بچا اسی طرح محال ہے جس طرح جذر المربع یا جذر اللکعب نکالنے کے عمل میں۔ یہ اور بات ہے کہ ہارنر کا عمل اس محنت کو حتی الامکان گھٹا دیتا ہے۔ اصولوں کو جدا کرنے میں بھی خصوصاً اس وقت جبکہ دو یا زیادہ اصلیں تقریباً مساوی ہوں کم یا زیادہ محنت کرنا پڑے گی۔ اس محنت میں کچھ تخفیف ہو سکتی ہے اگر سروں کے تفاعلوں پر جو مساواتوں کے نظریہ میں اس قدر اہم حصہ لیتے ہیں کافی غور کر لیا جائے۔ مثلاً اگر تفاعلوں  $h$  اور  $c$  کو دئے ہوئے چار درجہ کیلئے محسوب کر لیا جائے تو اصلوں نوعیت کا فوراً معلوم کر لینا ممکن ہے (دیکھو دفعہ ۶۸)۔ ممکن ہے کہ آئندہ کسی زمانہ میں علماء ریاضی اصولوں کو جدا کر نیکا کوئی آسان طریقہ ایجاد کر سکیں جس طرح فی زمانہ سادہ اصولوں کو نو کار تم کے ذریعہ محسوب کیا جاسکتا ہے لیکن فی الحال لکرائج کے مسئلہ کا مکمل ترین حل وہی ہے جو اسٹرم اور ہارنر کے طریقوں کو ملانے سے پیدا ہوتا ہے۔

اوپر جو کچھ بیان کیا گیا وہ صرف عددی مساواتوں کی حقیقی اصولوں صادق آتا ہے۔ ہم نے صفحہ ۳۹۵ کے حاشیہ میں ان کتابوں کا حوالہ دیدیا ہے جنہیں خیالی اور ملقف اصولوں کو محسوب کر نیکے عام طریقے دریافت کرنے کی کوششیں کئی ہیں اور دفعات ۱۲۴ اور ۱۲۵ میں یہ بتا دیا ہے کہ تیسرے اور چوتھے درجہ کی عددی مساواتوں کی صورت میں ان اصولوں کو آسان ترین طریقہ سے کس طرح محسوب کیا جاسکتا ہے۔

## نوٹ (ج)

(279)

اس مسئلہ پر کہ ہر مساوات کی ایک اصل ہوتی ہے

دفعات ۱۲۲ اور ۱۲۳ میں جو مسئلہ زیر بحث رہا ہے اس کے سلسلہ میں یہ ضروری ہے کہ جو کچھ ثابت ہوا وہ واضح طور پر ذہن میں رہے اور جو ثابت ہونا ممکن ہے اسکو اچھی طرح ذہن نشین کیا جائے۔ اگر مساوات

$$1 + 1 + 1 + \dots + 1 = 1$$

میں سرور ۱، ۱، ۱، ...، ۱ کو صرف جبری علامات کی طرح بغیر کسی قید کے استعمال کیا جائے یعنی اگر یہ سرکسی قسم کی قید کی پابندی نہ کریں جو حقیقی اعداد یا بارہویں باب میں بحث کردہ ملحق اعداد ہونے سے متعلق ہو تو ایسی مساوات کی صورت میں یہ ثابت نہیں ہوا ہے اور نہ اسکا ثبوت موجود ہے کہ ہر مساوات میں ایک اصل ہوتی ہے۔ وہ مسئلہ جو ثبوت پذیر ہے یہ ہے کہ ن ویں درجہ کی کسی منطقی صحیح مساوات کی صورت میں جس کے سر سب کے سب ملحق (بشمول حقیقی) اعداد ہیں ن ملحق اعداد موجود ہوتے ہیں جو اس مساوات کو پورا کرتے ہیں۔ چنانچہ اصطلاحات عدد اور عددی کو بارہویں باب کے وسیع معنوں میں استعمال کرنے سے زیر بحث مسئلہ کو زیادہ صحت کے ساتھ اس شکل میں بیان کیا جاسکتا ہے:-

ن ویں درجہ کی ہر عددی مسادات میں  $n$  عددی اشیاء ہوتی ہیں۔  
 جہاں تک اس مسئلہ کا تعلق ہے اس میں کوئی شبہ نظر نہیں آتا کہ بالکل  
 سیدھا اور باقاعدہ ثبوت وہ ہے جو خیالی جملوں یا بارہویں باب میں بحث  
 میں آئے ہوئے ملتف عددوں کو استعمال کرنے پر منحصر ہے۔ ملتف  
 عددوں کو مستوی کے نقطوں کے ذریعہ تعبیر کر نیکاً خیال سب سے پہلے  
 آرگنڈ کے ذہن میں آیا تھا جس نے مسئلہ میں بغیر اپنا نام ظاہر کئے ایک  
 تصنیف شائع کی جو

*Essai sur une maniere de représenter les*

*quantités imaginaires dans les constructions géométriques.*

کے نام سے موسوم ہے اس مصنف نے چند سال بعد جرجان کی  
 "Annales" میں اپنی تحقیقاتوں کا ذکر کیا ہے۔ انہیں شک نہیں کہ آرگنڈ  
 نے اپنے نئے طریقوں کی شہرہ میں بہت کچھ کوشش کی لیکن ان پر بہت کم  
 توجہ کی گئی اور ایک مدت کے بعد اہی طریقوں کو انگلستان میں دارن  
 نے اور فرانس میں مورے نے بلا واسطہ دریافت کیا۔ ان معلومات کا  
 گاؤس نے اپنی کتابوں میں جو ۱۸۳۱ء میں شائع ہوئیں اضافہ کیا اور کوشی  
 نے ان طریقوں کو دفعہ ۱۲۱ کے اہم مسئلہ کے ثبوت میں استعمال کیا۔ اس  
 مسئلہ کے سلسلہ میں جواب زیر بحث ہے اسکا وہ ثبوت جو ہم نے دفعہ ۱۲۳  
 میں دیا ہے فی الحقیقت اس ثبوت کی ترسیم ہے جو آرگنڈ کے اصلی مقالہ  
 میں پایا جاتا ہے اور جس کو کوشی نے اپنی کتاب *Exercices d'Analyse*  
 میں دہرایا ہے۔ ایک ثبوت جو بہت سی باتوں کا لحاظ کرتے متذکرہ بالا  
 ثبوت کے مشابہ ہے مرے نے بھی دیا ہے۔

ملتف عددوں کی ہندسی تعبیر دریافت ہونے سے پیشتر مختلف  
 علماء ریاضی مساداتوں کی اصولوں کی نوعیت کا مسئلہ حل کرنے میں مصروف  
 رہے۔ لگرائج نے اپنی کتاب "عددی مساداتوں" ٹوٹ ہنم میں ان کی  
 تحقیقاتوں کا ذکر کیا ہے۔ ان محققین کی فہرست میں ڈاہمرٹ، ڈیکارٹ،  
 یولر، فونسنیکس اور لاپلاس شامل ہیں جنکی توجہ صرف ایسی مساداتوں پر

مرکوز رہی ہے جن کے سر منطق تھے اور انکے پیش نظر یہ مقصد تھا کہ اجزائے ضربی لا۔ عہ، لا۔ یہ، وغیرہ کے وجود کو تسلیم کر کے یہ بتایا جائے کہ اصلیں سب کی سب یا تو حقیقی ہیں یا لا۔ ب۔ آ کے نمونہ کی خیالی مقداریں۔ یہ الفاظ دیگر حقیقی عددی سروں والی مساوات میں خیالی اصل کی کوئی اور شکل سوائے لا۔ ب۔ آ کے نہیں ہو سکتی جس میں لا اور ب حقیقی مقداریں ہیں۔ اس مسئلہ کے ثبوت کے لئے عام طور پر جو طریقہ رائج تھا وہ یہ ثابت کر نیکے لئے تھا کہ اس مساوات کی صورت میں جبکہ درجہ میں ۲ کسی قوت کے میں شامل ہوتا ہے اس کے دو درجہ جزو ضربی کے وجود کا امکان ایسی مساوات کے حل پر منحصر کیا جاسکتا ہے جس کے درجہ میں ۲ صرف قوت کے۔ ۱ میں شامل ہو اور اس عمل سے مسئلہ کو تحویل کر کے اسکو اس معلومہ اصول پر منحصر کر دیا جائے جو یہ ہے کہ طاق درجہ کی ہر مساوات جس کے سر حقیقی ہیں ایک اصل رکھتی ہے۔ اس مضمون پر لگ رائج نے جو تحقیقاتیں کی ہیں تذکرہ بالا کتاب میں درج ہیں۔ انکا تعلق صرف ایسی مساواتوں سے ہے جنکے سر حقیقی ہوں۔ اور یہ بالآخر اسی اصول پر آکر ٹکھتی ہیں جو اوپر مذکور ہوا یعنی حقیقی سروں کے ساتھ طاق درجہ کی مساوات میں ایک حقیقی اصل موجود ہوتی ہے۔

اسی اصول (یعنی طاق درجہ کی مساوات میں ایک حقیقی اصل کا وجود) پر منحصر کر کے اس مسئلہ کو حل کر نیکے دو طریقے حال ہی میں شائع ہوئے ہیں۔ ایک وہ ہے جو بر و فیسر ہلفرڈ کا ہے (دیکھو اسکے پیچھاٹیکل پیپر صفحہ ۲۰ اور کیمبرج کی فلاسوفیکل سوسائٹی کی روماد جلد دوم صفحہ ۱۷۱ اور دوسرے طریقہ میاٹ کا ہے دیکھو "Translation of the Royal Irish Academy" ۲۶ دس جلد صفحہ ۵۱۲) دوسری چیز کی مساوات سے ابتدا کر کے دونوں طرف سلسلہ کا طریقہ استعمال کرتے ہیں تاکہ (۲-۱) میں درجہ کی مساوات حاصل ہو جائے جس کے حل پر محوزہ مساوات کی ایک اصل کے وجود کا منحصر ہونا ثابت کیا جاتا ہے۔ اور چونکہ عدد (۲-۱) میں جزو ضربی ۲، عدد ۲ م کی بہ نسبت ایک



مرتبہ کم شامل ہوتا ہے یہ سہل یا آخر متذکرہ بالا طریقوں کی طرح طاق درجہ کی مساوات میں ایک اصل کے وجود کے اصول پر منحصر ہو جاتا ہے۔ وہ دو مساواتیں جن کے درمیان عمل اسقاط جاری ہوتا ہے م دیں اور (م-۱) دیں درجہ کی ہیں اور ان طریقوں کے طرز ثبوت کے درمیان جو فرق ہے وہ صرف ان مساواتوں کو حاصل کرنے کے لحاظ سے ہے۔ میالٹ کے طریقہ میں ان مساواتوں کو مجوزہ مساوات کے سادہ استحالہ کے ذریعہ حاصل کیا جاتا ہے اور پروفیسر کلفرڈ ایک حقیقی دودجی جزو ضربی سے دیے ہوئے کثیر الارقام کو تقسیم کر کے جو باقی رہتا ہے اسے ہر دوں کو ضفر کے مساوی رکھ کر ان کو حاصل کرتا ہے۔ ان سروں کی عام شکلیں اس کتاب کی دوسری جلد میں مقطعات کے باب کے آخر کی تفسیق مثالوں میں ملیںگی اور وہاں یہ بات آسانی سے معلوم ہوگی کہ اس طور پر حاصل کردہ مساواتوں سے یہ کو ساقط کرنے سے عہ میں ایک مساوات ملتی ہے جس کا درجہ (م-۱) ہے۔ (دیکھو مثال ۳۸ صفحہ ۱۰۱ جلد دوم)۔

تمت

۷۸۶

# اشارہ مساواتوں کا نظریہ جلد اول

نوٹ :- اعداد سے صفحات کا حوالہ دیا گیا ہے -  
 اخراج، رقموں کا ' ۹۴  
 آرگنڈ ' ۳۲۲  
 استحالہ، مساواتوں کا ' ۸۴  
 کعبی کا ' ۱۰۱  
 چار درجہ کا ' ۱۰۳  
 ہم رسم ' ۱۰۶  
 متشاكل تفاعلوں کے ذریعہ ' ۱۰۸  
 العموم ' ۱۱۴  
 اسٹرم، اسکا مسئلہ ' ۲۹۷  
 مساوی اصولوں کیلئے ' ۳۰۷  
 اسکے مسئلہ کا اطلاق ' ۳۱۱  
 اسکے مسئلہ پر مثالیں ' ۳۲۲، ۳۲۳، ۳۷۵

- اصلیں، متعلقہ مسائل، ۲۴  
 خیالی، ۲۷  
 تعداد، ۲۸  
 مساوی، ۳۲  
 ڈیکارٹ کا قاعدہ مثبت اصولوں کے لئے، ۳۶  
 منفی اور خیالی اصولوں کے لئے، ۳۸  
 سروں کے ساتھ رشتہ، ۳۵  
 اکائی کے جذور الکعب، ۵۸  
 انجے متشاكل تفاعل، ۶۳، ۲۴۵  
 ضعیفی، ۲۳۵، ۳۳۶  
 انجی انتہائیں، ۲۶۹  
 انگو جدا کرنا، ۲۸۳  
 متوافق، ۳۲۷  
 انجی تقرب، ۳۴۱، ۳۴۳  
 انجی کو مشی کا مسئلہ، ۳۸۹  
 ملحق اصلیں معلوم کرنا، ۳۹۴  
 ہر مساوات کی ایک اصل ہوتی ہے، ۳۹۲، ۴۲۱  
 اعداد، ملحق، ۲۸، ۳۷۷  
 اعظم اور اقل قیمتیں، ۲۳، ۲۳۰  
 انتہائیں، اصولوں کی، تعریفات، ۲۶۹  
 انجی مسئلہ، ۲۶۹، ۲۷۰، ۲۷۶  
 منفی انتہائیں اور منفی اصولوں کی انتہائیں، ۲۷۹  
 انتہائی مساواتیں، ۲۷۹  
 برنگ، ۴۱۴  
 بن موسیٰ، ۴۰۹

- بنیادی مسئلہ، ۳۹۱  
 کوشی کے مسئلہ سے ماخوذ، ۳۹۲  
 دوسرا ثبوت، ۳۹۲  
 تاریخی نوٹ، ۴۲۱  
 بوڈان کا مسئلہ، ۲۸۴  
 بومبلی، ۴۱۱  
 پانچ درجی، اسکی خاص شکل کا حل، ۱۵۳  
 اسٹرم کے باقی جبکہ دوسری رقم موجود نہ ہو، ۳۷۴، ۳۷۵  
 اس کے حل کا عدم امکان، ۴۱۲  
 پیرس، اسٹرم کے تفاعلوں پر، ۳۲۵  
 ترمیمی تعبیر، ۱۸  
 مشتق تفاعلوں کی، ۲۲۹  
 ملحق اعداد کی، ۳۷۷  
 تفاعلوں کی جدول، ۱۶  
 تقرب، عددی اصولوں کا:  
 نیوٹن کا طریقہ، ۳۴۱  
 ہارنر کا طریقہ، ۳۴۳  
 لگرنج کا طریقہ، ۳۶۵  
 ہارٹا گلیا، ۴۱۰  
 شنائی سر، ۹۶  
 شنائی مساداتیں، حل، ۱۳۰  
 خواص، ۱۳۴  
 حل، دائری تفاعلوں کے ذریعہ، ۱۴۳  
 حل، گاس کے طریقہ سے، ۱۴۹

- جبری مساواتیں، ۲، ۳۲۶  
 انکامل، ۱۵۵  
 کعبی کا حل، ۱۵۹  
 چار درجہ کا حل، ۱۷۷  
 تاریخی نوٹ، ۴۰۹  
 جذر الکعب، اکائی کے، ۵۸  
 چار درجہ، ۱۰۳  
 پولر کا حل، ۱۷۷  
 فیاری کا، ۱۹۰  
 ڈیکارٹ کا، ۱۹۶  
 متکافی شکل میں استعمال، ۱۹۹  
 متشاکل تفاعلوں کے ذریعہ حل، ۲۰۴  
 اصولوں کی نوعیت، ۲۱۲، ۳۱۹  
 حقیقی اصلیں، کعبی کی، ۱۲۰  
 چار درجہ کی، ۲۱۳  
 عام صورت میں، ۳۱۷  
 خارج قسمت اور باقی، جبکہ کثیرالارقام کو ثنائی جملہ سے تقسیم کیا جائے  
 خاص اصلیں، ثنائی مساواتوں کی، ۱۳۸  
 خیالی اصلیں، ۲۷  
 زوج زوج داخل ہوتی ہیں، ۳۳  
 کعبی کی، ۳۹۴  
 چار درجہ کی، ۳۹۹، ۴۰۳  
 خیام، ۴۰۹  
 ڈارون، جی۔ ایچ، مثال مل شدہ، ۳۷۲  
 ڈیکارٹ، قانون علامت، ۳۶، ۳۸

- دیکارٹ، چار درجہ کا حل، ۱۹۶  
 اضافے جبر و مقابلہ میں، ۴۱۱  
 ڈی گوا، خیالی اصولوں کے لئے قاعدہ، ۲۹۶  
 رابرٹس، دو کعبیوں سے ماخوذ مساوات پر، ۱۷۳  
 چار درجہ کی مربع دار فرقوں کی مساوات پر، ۲۱۱  
 تھامس ریلے، ۲۲۷  
 چار درجہ اور پانچ درجہ پر مثال، ۳۲۳  
 رتبہ، متشاکل تقاطعوں کا، ۲۵۷  
 رول کا مسئلہ، ۲۳۳  
 سامن، ۴۱۴  
 سمت، ملقب عدد کی، ۳۷۸  
 اسکاٹس، ۳۸۶  
 سن، ۴۱۱  
 سیپیو فیرو، ۴۰۹  
 سیرٹ، ۴۱۳  
 ضعیفی اصلیں، ۳۲، ۲۳۵، ۲۳۶  
 انکی تعین، مقسوم علیہم کے طریقہ سے، ۳۳۶  
 عددی مساواتیں، ۳، ۳۲۶  
 انکی متوافق اصلیں، ۳۲۷  
 انکی ضعیفی اصلیں، ۲۳۶، ۳۳۶  
 اصولوں کے تقرب کے طریقے، ۳۴۱، ۳۴۳، ۳۶۵  
 انجے حل پر نوٹ، ۴۱۵  
 بنیادی مسئلہ پر نوٹ، اصولوں سے متعلق، ۴۲۱  
 عرب، ۴۰۹  
 فلا ریڈو، ۴۱۰

- فوریر، اسکا مسئلہ، ۲۸۳، ۴۱۹  
 خیالی اصولوں پر اطلاق، ۲۹۲  
 نتائج صریح، ۲۹۶  
 فیئرری، چار درجی کا حل، ۱۹۰، ۴۱۱  
 قاعدہ، ڈیکارٹ کا، مساواتوں کا، ۳۶، ۲۹۷  
 ڈی گوا کا، ۲۹۶  
 دہری علامت کا، ۲۹۷  
 کارڈن، کعبی کا حل، ۱۵۹  
 مارٹا گلیا سے اس کے تعلقات، ۴۱۰  
 کثیرالارقام، عام خواص، ۹، ۷  
 انکی شکل میں تبدیلی، ۱۰  
 انکاسلس، ۱۳  
 انجی تریبی تغییر، ۱۸  
 اعظم اور اقل قیمتیں، ۲۳  
 کعبی، ۱۰۱  
 فرقوں کی مساوات، ۱۱۶  
 اصولوں کی نوعیت کی جانچ، ۱۱۹  
 کارڈن کا حل، ۱۵۹  
 دو کعبوں کے فرق کے طور پر، ۱۶۲  
 متشاکل تقاطعوں کے ذریعہ حل، ۱۶۴  
 اصولوں کا ہم رسم رشتہ، ۱۷۶  
 کلفرڈ، اس مسئلہ پر کہ ہر مساوات کی ایک اصل ہوتی ہے، ۴۲۳  
 کوشی، اسکا مسئلہ، ۳۸۹  
 کولا، ۴۱۰، ۴۱۱  
 گاس، شنائی مساواتیں، ۱۴۹

- گریٹھیلڈ، چاردرجی پر، ۲۰۱  
 لگرنج، فرقوں کی مساوات، ۲۰۹  
 اصولوں کے تقرب کے لئے اسکا کسر مسلسل کا طریقہ، ۳۶۵  
 مساواتوں کے حل پر، ۴۱۳  
 اسکا مقالہ ”عددی مساواتوں پر“ ۲۰۹، ۴۱۶، ۴۲۲  
 لوکس ڈی برگو، ۴۰۹  
 لیونارڈو، ۴۰۹  
 متجانس حاصل ضرب، ۲۶۵  
 متشاكل تفاعل، تقریفات، ۶۳  
 متعلقہ مسائل، ۷۳  
 انجے ذریعہ استحاله، ۱۰۸  
 سروں کی رقوم میں، ۲۴۸  
 انکار تبه اور وزن، ۲۵۶، ۷۳  
 انکو محسوب کرنا، ۲۵۹، ۶۵  
 متغیر، اسکی تبدیلی سے کثیر الارقام کی شکل میں تبدیلی، ۱۰  
 ملتفت، ۳۸۲  
 تنکافی اصلیں اور تنکافی مساواتیں، ۸۸  
 تنکافی مساواتوں کا حل، ۱۳۰  
 چاردرجی کا استحاله تنکافی شکل میں، ۱۹۹  
 متوافق اصلیں، ۳۲۷  
 مجموعے، اصولوں کی قوتوں کے:  
 نیوٹن کا مسئلہ، ۲۴۵  
 سروں کی رقوم میں، ۲۵۱  
 سروں کو انکی رقوم میں بیان کرنا، ۲۵۲  
 محول کعبی، ۱۷۹



- مساوات، مربع دار فرقوں کی :  
 کعبی کی، ۱۱۶  
 عام مساوات کی، ۱۲۱  
 چار درجہ کی، ۲۰۹  
 مساوات جسکی اصلیں دی ہوئی مساوات کی اصلوں کی قوتیں ہوں، ۱۱۰  
 مساوی اصلیں، ۳۲  
 شرط، کعبی کی صورت میں، ۱۲۰  
 چار درجہ کی صورت میں، ۲۱۲  
 تعین، ۲۳۶  
 مقسوم علیہم کے طریقہ سے، ۳۱۲  
 مشتق تفاعل، ۱۰  
 تریسیمی تعبیر، ۲۲۹  
 اصلوں کی رقوم میں، ۲۳۳  
 مقسوم علیہم، نیوٹن کا طریقہ، ۳۲۸  
 مقیاس، ملحق عددوں کا، ۳۷۸  
 ملحق اصلیں، عددی مساواتوں کی، ۳۹۴  
 کعبی کی، ۳۹۵، ۳۹۶  
 چار درجہ، ۳۹۹، ۴۰۰  
 ملحق عدد، ۲۸، ۳۷۷  
 تریسیمی تعبیر، ۳۷۷  
 جمع اور تفریق، ۳۷۹  
 ضرب اور تقسیم، ۳۸۱  
 دیگر اعمال، ۳۸۲  
 ملحق تغیر، ۳۸۲  
 تفاعل کا تسلسل، ۳۸۵

منطق صحیح تفاعل کا تسلسل، ۱۳۱  
 میاں، اس مسئلہ پر کہ ہر مساوات کی ایک اصل ہوتی ہے، ۴۲۳  
 نیوٹن، اہولوں کی قوتوں کے مجموعوں پر اس کا مسئلہ، ۲۴۵  
 انتہائیں معلوم کرنا، ۲۹۷، ۲۹۸  
 مقسوم علیہم کا طریقہ، ۳۲۸  
 تقرب کا طریقہ، ۳۲۱  
 والڈرمانڈ، ۴۱۲  
 واشٹنل، ۴۱۳  
 وزن، متشاكل تفاضلوں کا، ۲۵۶، ۲۵۷  
 ویٹا، ۴۱۵  
 یولر، چار درجہ کا حل، ۱۷۷  
 اس کا تحول کبھی، ۱۷۹  
 اس کے کبھی کے لئے اسٹرم کے تفاعلات، ۳۷۶  
 اس کی الجبر کی اشاعت، ۴۱۱  
 ہارلی، ۴۱۴  
 ہارٹر، عددی مساواتوں کو حل کرینے کا طریقہ، ۳۴۳  
 عمل کا اختصار، ۳۵۴  
 تقریباً مساوی اصولوں کی صورت میں اسکے طریقہ کا استعمال، ۳۵۹  
 عددی مساواتوں کے حل میں اس کے اضافے، ۴۱۹  
 ہرمانیٹ، ۴۱۳  
 ہم رسم استعمال، ۱۰۶  
 کبھی کی اصولوں کا رشتہ، ۱۷۶



# اصطلاحات

## مساواتوں کا نظریہ

### جلد اول

Absolute term

Ambiguous sign

Amplitude

Binomial

Biquadratic

Circular functions

Commensurable roots

Complex number

Complex variable

Covariant

Derived function

Dialytic

Equation of squared differences

False position

Fundamental Equation

رقم مطلق

بہم علامت

سعات

ثنائی، دو درجہ

چار درجہ

دائرہ نما فنکشن

متوافق اصلیں

ملقف عدد

ملقف متغیر

ہم متغیر

مشق تفاعل

بین تحلیلی

مربع دار فرقوں کی مساوات

باطل محل، کاذب محل

بنیادی مساوات

|   |                                       |
|---|---------------------------------------|
| Homogeneous products                    | تجانس حاصل ضرب                        |
| Homographic transformation              | ہم رسم استحاله                        |
| Incommensurable roots                   | متجانس اصلیں                          |
| Inferior limit                          | سفلی انتہا                            |
| Integral values                         | صحیح عددی قیمتیں                      |
| Invariants                              | غیر متغیر                             |
| Leading coefficients                    | صدر سر، فائق سر                       |
| Limiting equations                      | انتہائی مساواتیں                      |
| Method of divisors                      | مقسوم علیہم کا طریقہ، مقسوم کا طریقہ  |
| Modulus                                 | مقیاس                                 |
| Multiple roots                          | ضعفی اصلیں                            |
| Numerical equations                     | عددی مساواتیں                         |
| Order and weight of symmetric functions | متشاکل تفا علوں کا رتبہ { اور وزن     |
| Polynomial                              | کثیر الارقام، کثیر درجہ               |
| Precession                              | استقبال                               |
| Quadrature                              | تزیج                                  |
| Quantic                                 | کثیر درجہ                             |
| Quintic                                 | پنج درجہ                              |
| Rational & Integral function            | منطق صحیح تفاعل { منطق اور کملہ تفاعل |
| Reciprocal                              | مکافی                                 |
| Reducing cubic                          | محول کیسی شش درجہ                     |
| Sextic                                  | چھ درجہ                               |
| Special roots                           | خاص اصلیں                             |

Superior limit

علوی آتہا

Symmetric function

متشاکل تقاعل

Transform

ستجیل کرنا

Transformation

استحالہ

Transformed

استحال شدہ ستجیل

Trial divisor

آزمایشی مقسوم علیہ یا مقسم

Trinomial

سہ رقمی

